

I-80 十字形板の応力解析 (曲げ, ねじり荷重)

名古屋工業大学 正員 岡林 稔
正員 ○長谷部宜男

まえがき 十字形の板に面内の荷重1軸および2軸方向の引張りを加えた平面弾性問題としてこの十字形板の隅角部附近の応力分布については先に文献1で発表した。ここでは面外曲げねじりモーメントの載荷したいわゆる薄いプレートとして十字形板の隅角部附近の境界線に沿う曲げモーメントの分布を求め、応力集中率について考察した。またポアソン比と最大曲げモーメントの関係を求めた。

平面弾性問題として解こうとする領域が有理関数により単位円に写像される場合には、Fredholm の積分方程式を解くことなく閉じた解が得られる(文献2)が、薄いプレートとして面外荷重が載荷した場合も有理関数により単位円に写像される場合は、平面問題の場合と全く同じようにして閉じた解が得られる。(文献3) 従って単位円に写像する関数が有理関数でない場合は、いかにして精度のよい有理近似写像関数を作るかの問題である。この種の帯状を持つ領域について解析的に応力を求めようとする場合に生ずる困難は、写像関数をべき級数に展開した場合にその収束が極めて遅いことによる。ここでは有理写像関数として文献1で用いた分数式の和の形の写像関数を用いた。そして写像関数の作り方については、今一度説明する。

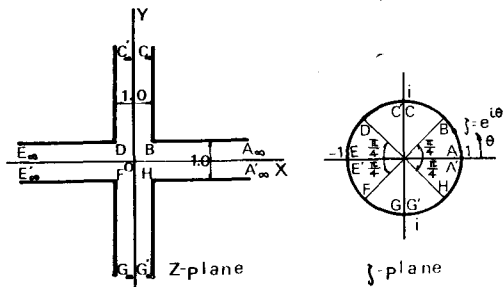


Figure 1

写像関数 図1に示すような幅1.0の無限長の十字形の帯状領域を単位円に写像する関数は、Schwarz-Christoffel の公式を用いて

$$Z = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int \frac{\sqrt{1+\zeta^4}}{1-\zeta^4} d\zeta \quad (1)$$

と表わされる。係数は、帯の幅が1.0に等するように決め、Z平面とz平面の対応点は、図1に示す。式(1)は有理関数でないため、これをもとの分数式

近似分数式の係数

Table 1

α	A	α	A
0.99999828960	0.00000453788	0.99998937126	0.00001482735
0.99996254881	0.00004352141	0.99988730016	0.00012034187
0.99967195573	0.00034827129	0.99907048845	0.00096121483
0.99735301962	0.00277337477	0.99257846166	0.00760392267
0.97911679490	0.02156063238	0.94275624906	0.05675414493
0.84710305852	0.14636202272	0.62354274540	0.31998707727
β	B	β	B
0.98073002680	-0.00007046228	0.93076486464	-0.00126123626
0.80516587218	-0.01499003567	0.55565256208	-0.10328167168

の和の形で有理関数の近似写像関数を作る。式(1)は、 $\zeta = \pm i$, ± 1 で帯が無限に伸びる対数的特異点を持つためこの附近での収束は極めて遅い。そこで式(1)を対数的特異点を持つ項とどうなる項とに分離する。すなわち

$$Z = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int \frac{\sqrt{2}}{1-\zeta^4} d\zeta + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int \left\{ \frac{\sqrt{1+\zeta^4}}{1-\zeta^4} - \frac{\sqrt{2}}{1-\zeta^4} \right\} d\zeta \quad (2)$$

に変形し1項, 2項各々別々に分数式の形で近似写像関数を作ろうとするものである。式(2)の1項をべき級数に展開すると

$$\int \frac{ds}{1-s^4} = \int + \frac{1}{5} s^5 + \frac{1}{9} s^9 + \dots + \frac{1}{4m-3} s^{4m-3} + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} Q_{4m-3} s^{4m-3} \quad (3)$$

これに対して求めようとする近似写像関数を次のような分数式の和の形で考える。

$$\sum_{j=1}^N \frac{A_j s}{1 - \vartheta_j^4 s^4} = \sum_{j=1}^N (A_j s + A_j \vartheta_j^4 s^5 + A_j \vartheta_j^8 s^9 + \dots) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N A_j \vartheta_j^{4m-3} s^{4m-3} \quad (4)$$

ここにNは、分数式の個数で、ここではN=12に選んだ。また $|\vartheta_j| < 1$ である。そこで式(3)と式(4)とを近似的に等しくなるように、式(4)の中に含まれている各々N個の未定定数 A_j, ϑ_j を求めようとするもので、今の場合未定定数を定める式は、

$$\sum_{j=1}^{12} A_j \vartheta_j^{4m-3} = Q_{4m-3} \quad (5)$$

である。ここでは Q_{4m-3} を $Q_5, Q_9, Q_{13}, Q_{17}, Q_{21}, Q_{25}, Q_{29}, Q_{33}, Q_{37}, Q_{41}, Q_{45}, Q_{49}, Q_{53}, Q_{57}, Q_{61}, Q_{65}, Q_{69}, Q_{73}, Q_{77}, Q_{81}, Q_{85}, Q_{89}, Q_{93}, Q_{97}, Q_{101}, Q_{105}, Q_{109}, Q_{113}, Q_{117}, Q_{121}, Q_{125}, Q_{129}, Q_{133}, Q_{137}, Q_{141}, Q_{145}, Q_{149}, Q_{153}, Q_{157}, Q_{161}, Q_{165}, Q_{169}, Q_{173}, Q_{177}, Q_{181}, Q_{185}, Q_{189}, Q_{193}, Q_{197}, Q_{201}, Q_{205}, Q_{209}, Q_{213}, Q_{217}, Q_{221}, Q_{225}, Q_{229}, Q_{233}, Q_{237}, Q_{241}, Q_{245}, Q_{249}, Q_{253}, Q_{257}, Q_{261}, Q_{265}, Q_{269}, Q_{273}, Q_{277}, Q_{281}, Q_{285}, Q_{289}, Q_{293}, Q_{297}, Q_{301}, Q_{305}, Q_{309}, Q_{313}, Q_{317}, Q_{321}, Q_{325}, Q_{329}, Q_{333}, Q_{337}, Q_{341}, Q_{345}, Q_{349}, Q_{353}, Q_{357}, Q_{361}, Q_{365}, Q_{369}, Q_{373}, Q_{377}, Q_{381}, Q_{385}, Q_{389}, Q_{393}, Q_{397}, Q_{401}, Q_{405}, Q_{409}, Q_{413}, Q_{417}, Q_{421}, Q_{425}, Q_{429}, Q_{433}, Q_{437}, Q_{441}, Q_{445}, Q_{449}, Q_{453}, Q_{457}, Q_{461}, Q_{465}, Q_{469}, Q_{473}, Q_{477}, Q_{481}, Q_{485}, Q_{489}, Q_{493}, Q_{497}, Q_{501}, Q_{505}, Q_{509}, Q_{513}, Q_{517}, Q_{521}, Q_{525}, Q_{529}, Q_{533}, Q_{537}, Q_{541}, Q_{545}, Q_{549}, Q_{553}, Q_{557}, Q_{561}, Q_{565}, Q_{569}, Q_{573}, Q_{577}, Q_{581}, Q_{585}, Q_{589}, Q_{593}, Q_{597}, Q_{601}, Q_{605}, Q_{609}, Q_{613}, Q_{617}, Q_{621}, Q_{625}, Q_{629}, Q_{633}, Q_{637}, Q_{641}, Q_{645}, Q_{649}, Q_{653}, Q_{657}, Q_{661}, Q_{665}, Q_{669}, Q_{673}, Q_{677}, Q_{681}, Q_{685}, Q_{689}, Q_{693}, Q_{697}, Q_{701}, Q_{705}, Q_{709}, Q_{713}, Q_{717}, Q_{721}, Q_{725}, Q_{729}, Q_{733}, Q_{737}, Q_{741}, Q_{745}, Q_{749}, Q_{753}, Q_{757}, Q_{761}, Q_{765}, Q_{769}, Q_{773}, Q_{777}, Q_{781}, Q_{785}, Q_{789}, Q_{793}, Q_{797}, Q_{801}, Q_{805}, Q_{809}, Q_{813}, Q_{817}, Q_{821}, Q_{825}, Q_{829}, Q_{833}, Q_{837}, Q_{841}, Q_{845}, Q_{849}, Q_{853}, Q_{857}, Q_{861}, Q_{865}, Q_{869}, Q_{873}, Q_{877}, Q_{881}, Q_{885}, Q_{889}, Q_{893}, Q_{897}, Q_{901}, Q_{905}, Q_{909}, Q_{913}, Q_{917}, Q_{921}, Q_{925}, Q_{929}, Q_{933}, Q_{937}, Q_{941}, Q_{945}, Q_{949}, Q_{953}, Q_{957}, Q_{961}, Q_{965}, Q_{969}, Q_{973}, Q_{977}, Q_{981}, Q_{985}, Q_{989}, Q_{993}, Q_{997}$ の24個に選び、この24個の連立方程式を電子計算機で解いて計算させて求めた。 $|\vartheta_j| < 1$ であることはその結果より確認できる。こうして求めた A_j, ϑ_j の値を表1の上段に示す。かくして式(3)に対する近似分数式は、

$$\int \frac{ds}{1-s^4} = \int + \sum_{j=1}^{12} \left[\frac{A_j s}{1 - \vartheta_j^4 s^4} - A_j s \right] \dots \quad (6)$$

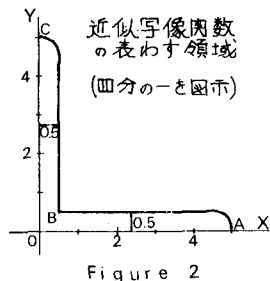
の形で求める。式(3)の本式のべき乗の係数と近似分数式(4)のべき乗の係数は、低次の項で小数4, 5桁、高次の項では6, 7桁まで一致し、 Q_{524289} は $\int$ の524289乗にあたるので、このべき乗の項まではかなり一致し、これ以上のべき乗の項もかなりのところまで一致する。

式(2)の2項に対する近似関数の作り方も全く同じで、ただこの場合のべき乗の収束の速いことこの符号も考えて分数式を $\sum_{j=1}^4 B_j s / (1 + \beta_j^4 s^4)$ の形に4個選び、 $\int$ の2, 3, 4, 5, 9, 17, 25, 33の項でべき乗が一致するように B_j, β_j を決めた。ここで $|\beta_j| < 1$ である。

以上より写像関数式(1)に対する有理型の近似写像関数は $\int$ の1次の項と分数式の項とで、

$$Z = \omega(s) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left\{ (1 - \sqrt{2} \sum_{j=1}^{12} A_j - \sum_{j=1}^4 B_j) \int + \sqrt{2} \sum_{j=1}^{12} \frac{A_j s}{1 - \vartheta_j^4 s^4} + \sum_{j=1}^4 \frac{B_j s}{1 + \beta_j^4 s^4} \right\} \quad (7)$$

の形で求める。こうして求めた近似写像関数(7)の表す領



1軸面外曲げ線曲げモーメント分布

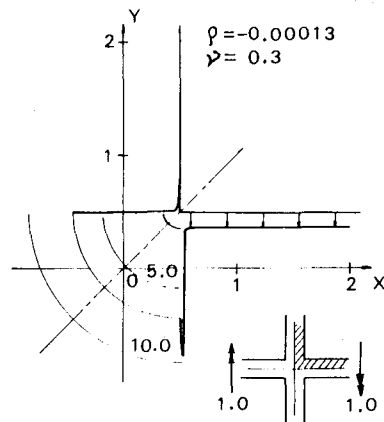


Figure 3

2軸面外曲げ線曲げモーメント分布

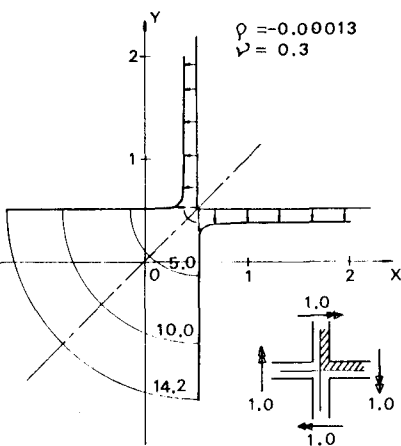


Figure 4

域とグラフに表わしたのが図2で、無限長の帯の長さ、幅1.0 (以後長さの単位はすべてこれである) として約5倍で有限長であり、X軸方向に伸びる帯のY座標は、0.5が本物であるがその凸凹は極めて小さく大きいところで0.0003ぐらいである。表2には隅角部と中心にしてその座標値が載せてあるがその凸凹の様子はよくわかる。また隅角部B点は本物のなら角点であるが近似写像関数のため小さな丸味がついており、この点での曲率半径を計算すると-0.00013 (一の符号は外向きへの向きを表わす) で極めて小さな丸味で、式(7)の表わす有理写像関数は十分精度のよいものである。また式(7)の1次導関数がjの単位円内で零点を持たないことを確かめる必要があるが、今の場合零点の出来どうなのは式(1)よりわかるように隅角部B, D, F, Hの近傍であるが、この附近のグラフを描くと境界線はなめらかに変化しており、零点を持たないことがわかる。

1軸面外ねじり線曲げモーメント分布

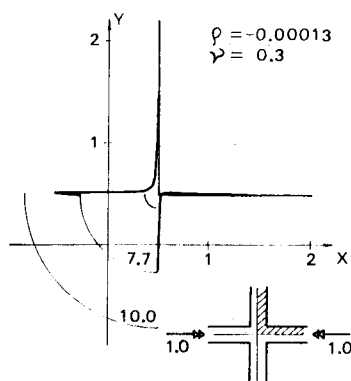


Figure 5

2軸面外ねじり線曲げモーメント分布

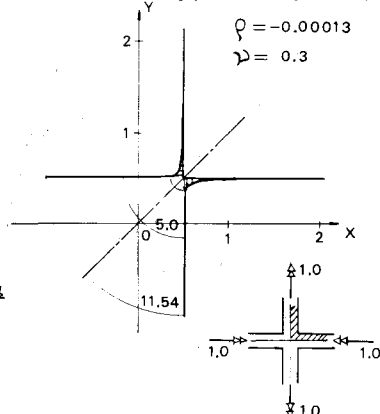


Figure 6

応力計算の基本式および境界条件 複素応力関数と $\varphi(\zeta)$,

$\psi(\zeta)$ とすると求めようとする曲げモーメント等は

$$M_p + M_\theta = -2D(1+\nu) \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} \right] \quad (8)$$

$$M_\theta - M_p + 2i\chi p_0 = \frac{2D(1-\nu)\zeta^2}{|\zeta|^2 \omega'(\zeta)} \left[\omega(\zeta) \left\{ \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\}' + \psi'(\zeta) \right]$$

と表わされる。ここにDは、曲げ剛さ、 ν はポアソン比である。複素応力関数 $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ を定めるために満足すべき境界条件式は、j平面の単位円周上 $\zeta = e^{i\theta}$ で

$$-\frac{3+\nu}{1-\nu} \varphi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta) + \psi'(\zeta) = f_1 + if_2$$

である。 $f_1 + if_2$ は、境界条件より定まる関数である。上式両辺に $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\zeta}{\zeta - j}$ を乗じ単位円周上の周回積分を行って求めたい未知関数 $\varphi(\zeta)$ は、写像関数 $\omega(\zeta)$ が、今の場合式(7)で与えられ、単位円内で正則、単位円外の65個の点で1位の極を持つ関数で、また $\omega(\zeta)$ は単位円内で零点を持たない関数であることを考えて、 $\varphi(\zeta)$ における未定関数につき30元1次の連立方程式を解くことによって $\varphi(\zeta)$ を定めることが出来る。 $\varphi(\zeta)$ が定めれば $\psi(\zeta)$ は簡単に定まる。

境界条件として載荷した荷重は、図3, 4のように帯の先端に面外集中曲げモーメントを加えた1軸および2軸面外曲げと図5, 6のように帯の先端に集中ねじりモーメントを加えた1軸および2軸面外ねじりの4通りについて考えた。

計算結果 前に述べた4通りの荷重のもとで、ポアソン比を0.3として隅角部附近の境界線に沿う曲げモーメントを計算し、グラフに示したのが図3, 4, 5, 6であり、これらの数値を示したのが表2である。図3には、1.0の大きさの1軸面外曲げ荷重をかけた場合の曲げモーメントの分布を示した。また表2には、座標値とその点での曲げモーメントの値が示してある。これらを見て

かるように載荷された x 軸方向で隅角部より

Table 2

十分離れたところでは1.0の大きさに隅角部に近づくにつれて急に大きくなり、応力集中が生じている。最大曲げモーメントは、9.61に達し、その発生点も、対称軸より少し載荷された帯の方向によっている。この点を過ぎるとモーメントは急激に減少し、 y 軸方向に行くにつれて0に近づいていく。図4には、2軸の帯の先端に大きき1.0の面外曲げモーメントを加えたときの曲げモーメント分布を示してある。隅角部より十分離れたところでは1.0の大きさをもち、隅角部附近で急激に大きくなり、最大曲げモーメントは対称軸 $\pi/4$ のところでは生じている。図5には x 軸方向の帯の先端に大きき1.0の集中ねじりモーメントを載荷した場合の曲げモーメントの分布を示してある。

θ	座 標		1軸曲げ	2軸曲げ	1軸ねじり	2軸ねじり
	x	y	M_x	M_y	$M_{\phi x}$	$M_{\phi y}$
0.004	2.11761	0.50006	1.00	1.00	-0.002	-0.001
0.01	1.82602	0.49976	1.00	1.01	-0.003	0.0005
0.04	1.38237	0.49994	1.00	1.02	-0.003	0.015
0.15	0.96562	0.50014	1.00	1.04	-0.006	0.09
0.25	0.80494	0.49997	1.02	1.07	-0.014	0.16
0.4	0.66170	0.50000	1.07	1.14	-0.017	0.31
0.58	0.55760	0.50000	1.28	1.33	-0.03	0.61
0.68	0.52071	0.49996	1.64	1.65	-0.06	0.98
0.73	0.50787	0.49999	2.14	2.08	-0.10	1.42
0.773	0.50023	0.50000	4.37	3.74	-0.53	2.89
0.78	0.50026	0.49999	7.18	6.15	-0.81	4.90
0.7813	0.50019	0.49999	8.21	7.54	-0.52	6.03
0.7823	0.50015	0.50000	9.04	9.08	0.07	7.31
0.7835	0.50010	0.50001	9.61	11.51	1.59	9.31
0.785	0.50006	0.50004	8.08	14.06	4.87	11.41
$\pi/4$	0.50005	0.50005	7.11	14.22	5.77	11.54
0.786	0.50003	0.50006	5.38	13.87	6.87	11.25
0.7865	0.50002	0.50008	—	—	7.44	10.65
0.787	0.50002	0.50009	—	—	7.70	9.83
0.788	0.50000	0.50013	0.65	10.03	7.52	8.09
0.79	0.49999	0.50022	—	—	6.21	5.53
0.8	0.50001	0.50106	-0.50	3.50	3.11	2.69
0.85	0.49999	0.50991	-0.04	1.96	1.40	1.31
0.9	0.49996	0.52351	0.02	1.60	0.99	0.93
1.1	0.50003	0.61426	0.07	1.19	0.43	0.41
1.4	0.50021	0.92452	0.05	1.05	0.11	0.09
1.54	0.50007	1.46737	0.01	1.01	0.01	0.008
1.56	0.49997	1.80170	0.01	1.01	0.003	0.002

・荷重載荷側では、小さいけれども負の曲げモーメントが生じ、隅角部に近づくにつれて少し大きくなり、隅角部の手前で負から正に変わって急激に大きくなり応力集中が生じている。最大曲げモーメントは、対称軸 $\pi/4$ より少し荷重の載荷されていない y 軸側で生じ、1軸面外曲げの最大曲げモーメントが載荷側に生じたのと定性的に異なっている。最大曲げモーメントの発生点を過ぎると曲げモーメントは急激に減少し0に近づいていく。図6には2軸方向の帯の先端にねじりモーメントを加えた場合について示してある。隅角部附近で急激に増加し、かなりの応力集中の生じていることがわかる。

最大曲げモーメントとポアソン比 ν の関数 ポアソン比 ν の値と

0.0から0.1きざみに0.5まで変化させて、そのときの2軸面外曲げと2軸面外ねじりの場合の最大曲げモーメントとの関係を表にしたのが表3であり、これをグラフに示したのが図7である。図7を見てわかるように最大曲げモーメントとポアソン比の関数は、ほぼ直線的に表わされる。

Table 3

ポアソン比 ν	ポアソン比と最大曲げモーメント	
	2軸面外曲げ最大曲げ M	2軸面外ねじり最大曲げ M_{ϕ}
0.0	11.60	8.35
0.1	12.50	9.40
0.2	13.37	10.46
0.3	14.22	11.54
0.4	15.03	12.64
0.5	15.83	13.74

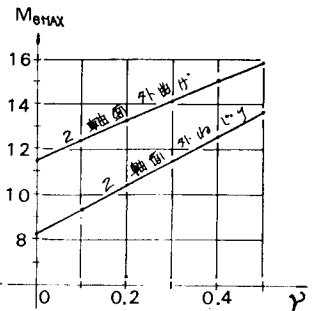


Figure 7

(参考文献)

- (1) 岡林・長谷部：「十字形板の応力解析（面内荷重）」土木学会中部支部研究発表会講演概要集 昭和45年
- (2) Muskhelishvili：「Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity」
- (3) G. N. Savin：「Stress Concentration around Holes」Pergamon Press