

I-77 任意形状の孔と有する異方性弾性梁内の応力状態

京都大学・工学部 正員・平島健一

京都大学・工学部 正員 丹羽義次

1. まえかき

梁の内部の応力分布に及ぼす孔の影響と求める問題は従来より、幾人かの研究者により解析が行なわれている。例えば、辻¹⁾, Savin²⁾, Joseph and Brock³⁾, Heller⁴⁾, Heller⁵⁾, 山崎・後藤および Deresiewicz⁷⁾等の研究とあげることが出来る。これらの研究では純曲げ、または片持曲げとつける等方性梁内の円形、お円形、正三角形、正方形、矩形、多角形等の孔周縁での応力状態について数値計算がなされている。これらのいづれの場合においても、孔の軸は等方性梁の長軸に直で、作用荷重の軸に平行であり、また孔径は梁の桁高に比し充分に小さいと仮定して計算されている。このように仮定すると、孔と自由境界とする単結合の平板(無限板)が曲げモーメントおよびせん断力を受けた場合の孔周縁の平面応力状態と求めればよいことになる。

これらの研究者による理論計算は写像関数の多項式の項数として数項で表わされる孔を対象としているため、複雑な形状の孔、もしくはより正確に孔形状を表わすために項数を多く採用して計算を行なうことはそのままでは不可能である。

著者らは一般的な異方性弾性材料でできた梁が純曲げ、片持曲げその他の外荷重を受けた場合に梁内の任意形状の孔周縁部における応力分布を求める試みを行なった。著者らの方法では、任意形状の孔を表わす写像関数の項数と理論的に制限なくともそのまますぐに計算できる理論構成が行なわれている。

この論文に述べる異方性板の曲げモーメント、せん断力による任意形状の孔周縁の応力を求めることは、最近、航空関係その他の工学分野で非常に重要な役割をはたしつつある繊維強化複合材料のような異方性材料の力学的挙動と把握するために重要な課題の一つであり、異方性梁が孔をもたない場合の問題は Lekhnitskii⁸⁾, Silverman⁹⁾, Hashin¹⁰⁾等により理論研究が行なわれている。なおまた、Lekhnitskiiは ovaloid 形の孔を有する異方性弾性板(無限板)に純曲げの外荷重応力が作用する場合の孔周縁の応力分布と摂動法により近似解と求めているが、著者らの方法では純曲げに限らずさらに複雑な外荷重応力の作用に対しても厳密解が求められる。

この論文では従来までの研究と同様に梁内に設けらる孔の外径は梁の桁高に比し充分に小さいものとして理論解析を行なったが、これに関連して孔が桁高に比して充分小さくなった場合の誤差の評価についても数値的に検討した。

2. 異方性弾性梁に対する基礎式

異方性弾性板に対する一般化した Hooke の法則はつきのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} E_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy} \\ E_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

いま、異方性弾性板内の応力を求めるために二つの複素変数:

$$Z_R = X + \mu_R Y, \quad (R=1, 2) \quad (2)$$

を導入する。 μ_1, μ_2 は(1)式で表わされる異方性弾性材料に対するべき特性方程式:

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (3)$$

の複素根である。直交デカルト座標系 (X, Y) 内の応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は z の複素解析関数 $\phi(z_1)$ および $\phi_2(z_2)$ の項でべきのように与えられる。⁸⁾

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re} [\mu_1^2 \phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \phi_2'(z_2)] \\ \sigma_y &= 2 \operatorname{Re} [\phi_1'(z_1) + \phi_2'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re} [\mu_1 \phi_1'(z_1) + \mu_2 \phi_2'(z_2)] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

さて、孔のはい異方性梁の自由端に集中荷重 P の片持曲げの外荷重が作用した場合のこの梁内に生じる応力は次式で与えられる。^{8~10)}

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 &= \frac{P}{I} (a_0 - X)(Y + \varepsilon_0) + \frac{P}{I} \cdot \frac{a_{16}}{a_{11}} \left\{ \frac{R^2}{3} - (Y + \varepsilon_0)^2 \right\} \\ \tau_{xy}^0 &= 0, \quad \tau_{yx}^0 = -\frac{P}{I} \{ R^2 - (Y + \varepsilon_0)^2 \} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

よって、片持曲げをうける任意形状の孔を有する異方性梁内の応力状態はべきのようにして計算される。すなわち、(5)式で与えられる応力式から孔の位置するはずの仮想の境界円縁における法線方向の直応力およびせん断応力を求め、これを打消すように外荷重を、この孔をもつ梁の孔円縁に作用させた場合の応力状態を(4)式により求める。この応力成分と(5)式で与えられる応力成分を重ね合わせれば所期の目的の問題が解ける。

3. 写像関数および境界条件

Fig. 1 に示したような任意形状の孔の境界を表わす式が次式で与えられるものとす。

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= \alpha_0 \cos \theta + \sum_{m=1}^{\nu} (\alpha_m \cos m\theta + \beta_m \sin m\theta) \\ Y_0 &= \alpha_0 \sin \theta - \sum_{m=1}^{\nu} (\alpha_m \sin m\theta - \beta_m \cos m\theta) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

すなわち、 α_m, β_m ($m=0, 1, \dots, \nu$) は孔の断面形状によつて決まる実定数であり、 ν は正の整数を表わす。任意形状の孔を有する梁内に直交デカルト座標系 (X, Y) を設けると、この座標平面 $z_0 (= X + iY)$ 内の孔の境界およびその外部領域を

$$z_0 = \alpha_0 \zeta + \sum_{m=1}^{\nu} (\alpha_m + i\beta_m) \zeta^{-m} \quad (7)$$

によつて、 ζ -平面の単位円上およびその外部に写像することができ。同様に、写像関数:

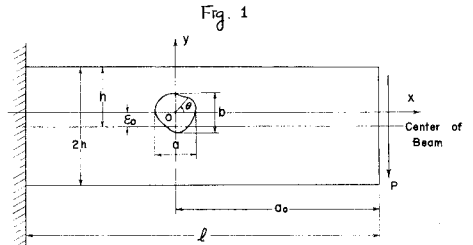
$$z_R = \frac{1}{2} \left[\alpha_0 \{ (1-i\mu_R) \zeta_R + (1+i\mu_R) \zeta_R^{-1} \} + \sum_{m=1}^{\nu} \{ (\alpha_m + \mu_R \beta_m) + i(\mu_R \alpha_m - \beta_m) \} \zeta_R^m \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\nu} \{ (\alpha_m + \mu_R \beta_m) - i(\mu_R \alpha_m - \beta_m) \} \zeta_R^{-m} \right], \quad (R=1, 2) \quad (8)$$

によつて、 z_R -平面上の孔の境界上およびその外部を ζ_R -平面の単位円上およびその外部に写像する。

そこで、(6)式で与えられるような任意形状の孔に沿つて生じる法線方向の直応力と σ_x 、接線方向の直応力と σ_θ 、およびせん断応力と $\tau_{\theta\theta}$ とすれば、応力の基礎関係より次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_\theta &= \sigma_x + \sigma_y \\ \sigma_x - \sigma_\theta + 2i\tau_{\theta\theta} &= \frac{\int d\bar{z}_0}{\int dz_0} \frac{d\bar{z}}{dz_0} (\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

上式中の右辺の $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は(4)式によつて与えられる応力成分である。しかるに(4)式の複素関数 $\phi_R(z_R)$ は孔の境界に作用する外荷重応力の各座標軸方向の成分 X_R, Y_R が与えられるれば、次式:



$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} [\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)] &= \int Y_n ds \\ 2 \operatorname{Re} [\mu_1 \phi_1(z_1) + \mu_2 \phi_2(z_2)] &= - \int X_n ds \end{aligned} \quad (10)$$

によって計算するこゝができる。しかるに、 X_n, Y_n は 4 節での説明より、(5) 式の応力成分を用いて
 つぎのように表わされるのは容易に理解できる。

$$\left. \begin{aligned} X_n &= - [\sigma_x^0 \cos(n, x_0) + \tau_{xy}^0 \cos(n, y_0)] \\ Y_n &= - [\tau_{xy}^0 \cos(n, x_0) + \sigma_y^0 \cos(n, y_0)] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

こゝに、 n は孔の境界に直な孔の中心側に向う単位ベクトルである。いま、 δ と孔の境界線との時計廻りの単位接線ベクトルとすれば、(11) 式中の方向余弦の向はつぎの関係が成立する。

$$\cos(n, x_0) = - \frac{dy_0}{ds}, \quad \cos(n, y_0) = \frac{dx_0}{ds} \quad (12)$$

したがって、(11), (12) および (6) 式を使って (10) 式の右辺の積分式を計算し、 $\phi_1(z_1), \phi_2(z_2)$ を未知数とする複素係の連立一次方程式を解けばよい。しかし、以後の計算が可能なように (10) 式の右辺の積分式は三角函数に展開した形で求めておく必要がある。先節では、主として集中荷重 P の片持曲げもうける梁に対する二、三の数値計算例を示そう。

4. 数値計算例

数値計算に際して、Savin, Deresiewicz の結果と比較しやすいように、 $l = 10R_0 = \frac{4}{3}a_0$ にせり、さらに、 y 軸方向の孔径 b は梁の桁高の $\frac{1}{4}$ (i.e. $b = \frac{R_0}{2}$) とした。Fig. 2 は等方性梁内の正方形孔の場合の孔縁応力 σ_θ の分布を展開図として示したものである。こゝでは孔の偏内部の穴み ρ とパラメータとして図示してある。この結果は Deresiewicz の示した結果とほぼ同じような値となっているが、著者らの結果と彼のとは厚薄肉数の係数が異なるため、円孔の場合を除いて計算結果にわずかの違いがみられる⁷⁾。Fig. 3 は Fig. 2 の孔が梁の中心軸より上方に $\varepsilon = \frac{R_0}{4}$ だけ偏心した場合の例である。

以上は等方性梁に対する例であるが、つぎに直交異方性梁に対する計算結果の一例を示せば、Fig. 4, 5 のようである。Fig. 4 は円孔の場合の孔縁応力 σ_θ と主弾性係数比 $\nu (= E_1/E_2)$ とパラメータとして示したものである。

この例では主弾性軸 x_1, E_2 の座標軸方向 x, y との反時計廻りの傾斜角 φ として 45° の場合を示してある。なお、ポアソン比は $\nu_1 = 0.30$ 、せん断弾性係数は先述で定義された値を採用した。

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_1}{E_1} \quad (13)$$

Fig. 2

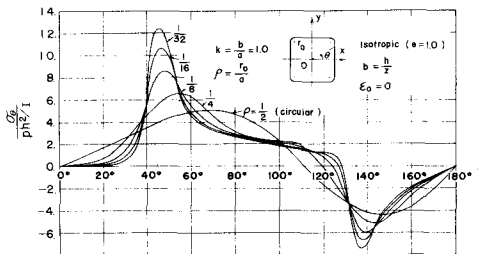


Fig. 3

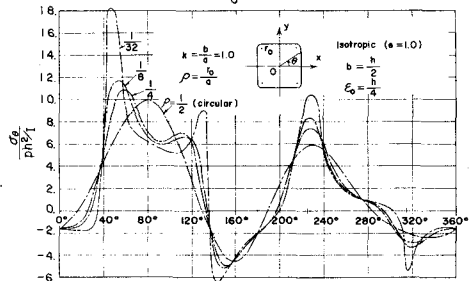


Fig. 4

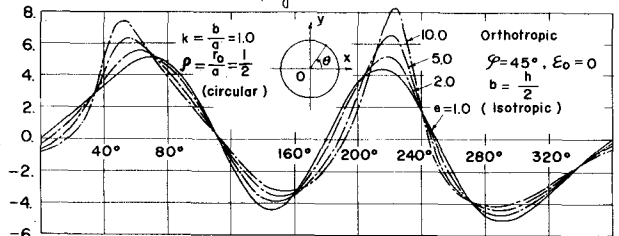


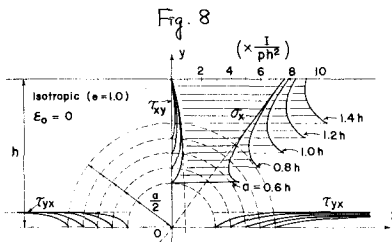
Fig.5は正方形孔($p=\frac{1}{8}$)が梁の中心軸より上側に $\varepsilon_0 = \frac{h}{4}$ だけ偏心した場合の孔縁応力 σ_θ の分布の例である。
 の場合も $\varphi=45^\circ$ としたものと図示した。

Fig.6は上端に等分布荷重 q の片持曲げとウける梁の場合の一計算例を示したものである。図には円孔および正方形孔($p=\frac{1}{8}$)の場合の σ_θ の分布が示されており、点線が $\varepsilon_0 = -\frac{h}{4}$ 、一点鎖線で示したものが $\varepsilon_0 = \frac{h}{4}$ の場合である。ただし、この図において $\varepsilon_0 = -\frac{h}{4}$ の偏心孔の場合、 $\varepsilon_0 = \frac{h}{4}$ のものと比較しやすいように、 θ のとり方は時計方向にせり、さらに σ_θ の符号も逆の符号をつけて図示を行なっている。

以上までの計算例は孔周縁の応力 σ_θ についてのみ図示したが、孔縁以外の位置における応力と求めたものの一例がFig.7, 8である。

Fig.7は偏心円孔($\varepsilon_0 = \frac{h}{4}$)をもつ直交異方性梁($\nu=3.0$, $\varphi=45^\circ$)の軸線上の応力および σ_θ の分布図である。図中の細い点線は孔がないときとときに梁内に生じる応力 σ_x , τ_{xy} の分布である。Fig.8は等方性梁内に設ける円孔の径を徐々に大きくしていった場合の座標軸線上の応力成分とプロットしたものである。これはの

結果についての考察は紙面の都合上、講演会当日に譲る。



参考文献:

- 1) 辻二郎, Philosophical Magazine, Vol. 9, No. 56 (1930), pp. 210-224
- 2) G. N. Savin, "Stress Concentration Around Holes" (Eng. Trans.), Pergamon Press (1961), pp. 87-101
- 3) J. A. Joseph and J. S. Brock, Journal of Applied Mechanics, Vol. 17 (1950), pp. 353-358
- 4) S. R. Heller, Jr., Proc., 1st U.S. National Congress of Applied Mechanics, Chicago (1951), pp. 239-245
- 5) S. R. Heller, Jr. et al, Proc., 4th U.S. National Congr. of Applied Mech., Berkeley (1962), pp. 489-496
- 6) 山崎徳也・後藤虎之輔, 九州大学工学集報, 41巻6号(1968), pp. 931-938, 42巻2号(1969), pp. 121-128
- 7) H. Deresiewicz, Journal of the Engineering Mech., ASCE, Vol. 94, No. EM5 (1968), pp. 1183-1214
- 8) S. G. Lekhnitskii, "Anisotropic Plates" (Eng. Trans.), Gordon and Breach (1968), pp. 57-62, pp. 235-272
- 9) I. K. Silverman, Journal of the Engineering Mech., ASCE, Vol. 90, No. EM5 (1964), pp. 293-319
- 10) Z. Hashin, Journal of Applied Mechanics, Vol. 34 (1967), pp. 257-262

Fig. 5

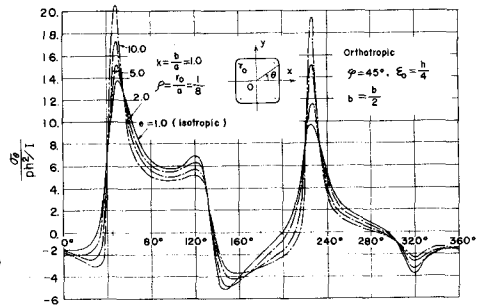


Fig. 6

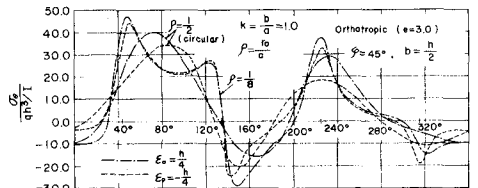


Fig. 7

