

九州大学 工学部 正 員 後藤 忠之輔
九州大学 工学部 学生員 ○梅本 明彦

1. 序 有孔はりにおいて孔縁に能力集中が起りはりが弱くなることは周知のとおりである。これを避ける一方法として孔縁をリソングで補強することが考えられるが、ここで問題となるのはどの程度に補強を行えば能力集中を避けるかということである。この孔縁の補強効果は、円孔を有する無限板について多くの研究者により説明されているが、円孔を有する単純はりや片持はりさらには任意形の補強孔を持つこゝろ種々のはりについてほとんど解が求めている。本論文は補強円孔を持つ単純はりおよび片持はりの種々の荷重が作用する場合の弾性能力を複素変数法により解析し、能力集中に列する孔縁の補強効果を明らかにせんとするものである。

2. 能力函数の誘導および能力の算定

A. 等分布荷重を満載する単純はり

① 能力函数の一般式 能力函数を $\Phi(z)$, $\bar{\Psi}(z)$ とすれば,

これははりおよびリソングに対してそれぞれ次のごとく仮定される。

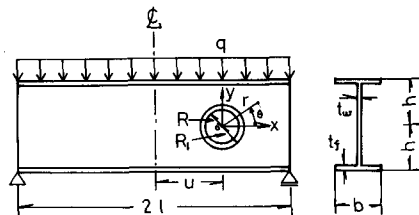


図-1

$$\text{はりに対して } \Phi(z) = \bar{\Psi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} B_k z^{-2k}, \quad \bar{\Psi}(z) = \Psi(z) + \bar{\Phi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^{-2k} \quad (1a)$$

$$\text{リソングに対して } \Phi(z) = -\bar{\Psi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^{-2k}, \quad \bar{\Psi}(z) = -\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-2k} \quad (1b)$$

ここで $z = x + iy = re^{i\theta}$, (x, y) : 孔中心を原点とする直角座標, (r, θ) : 極座標で, サフックス "0" の函数は孔のないときの能力函数, サフックス "1" のものは孔の存在による付加能力函数である。孔のないときの能力函数は既知の能力状態より求められ、付加能力函数は孔縁の境界条件式およびはりとりソングとの結合部における連続条件式より決定される。

(2) 孔のないときの能力函数の決定 図-1に示すごとく荷重端と考えると、孔のないときのはりの腹部の能力は次式で与えられる。

$$\sigma_x = -\frac{q}{2I} \left\{ \left[l - (x+u)^2 \right] y + \frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} C^* y^5 \right\}, \quad \tau_{xy} = \frac{q}{2I} \left\{ \left(\frac{1}{3} y^3 - C^* y^5 - \frac{2}{5} C^* y^5 \right), \quad \tau_{xy} = \frac{q}{2I} (C^* - y^2)(x+u) \right\} \quad (2)$$

ここで l : $1/2$ スパン, I : 孔を有しない I 型はりの中立軸に属する断面二次モーメントで、 C^* は次式で与えられる換算桁高である。

$$C^* = h \left(1 + \frac{2k^2 t_1}{t_0 h} \right)$$

しかるに、直角座標における能力成分 σ_x, σ_y および τ_{xy} は次式に示す Kolosov-Muskhelishvili の公式による能力函数 $\Phi(z)$ および $\bar{\Psi}(z)$ と関係づけられる。

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \bar{\Psi}(z)], \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\Phi(z) + \bar{\Psi}(z)] \quad (3)$$

式(1a)の $\Phi(z)$, $\bar{\Psi}(z)$ と式(2)とを式(3)に代入して未定係数 A_k, B_k を求めれば、孔のないときの能力函数が次式のごとく決定される。

$$\Phi(z) = \frac{q}{16I} \left[-\frac{1}{6} z^4 - \frac{2i}{3} u z^3 + i \left(l^2 - u^2 + \frac{2}{3} C^* \right) z^2 - \frac{4}{5} C^* z^2 \right] \\ \bar{\Psi}(z) = \frac{q}{16I} \left[8 C^* \left(-\frac{2}{3} + iu \right) z + i \left(-l^2 + u^2 + \frac{17}{5} C^* \right) z^2 + i \frac{4}{5} u z^3 + i \frac{1}{2} z^5 \right] \quad (4)$$

(3) 付加能力函数の誘導 孔縁 ($r=R$) は通常何らの外力も作用していないゆえ、孔縁における境界

条件式として次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \overline{\psi}(t) + t\overline{\psi}(t) + \overline{\psi}(t) &= 0 \\ \text{共役式をとって } \overline{\psi}(t) + \overline{t}\overline{\psi}(t) + \overline{\psi}(t) &= 0 \\ \text{ここで } t &= Re^{i\theta} \end{aligned} \right\} (5)$$

ほりとリニクとの結合部においては能力と変位の連続性より次の連続条件式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \overline{\psi}(t) + t\overline{\psi}(t) + \overline{\psi}(t) &= \overline{\psi}(t) + t\overline{\psi}(t) + \overline{\psi}(t), \frac{1}{\mu} [k_1\overline{\psi}(t) - t_1\overline{\psi}(t) - \overline{\psi}(t)] = \frac{1}{\mu} [k_1\overline{\psi}(t) - t_1\overline{\psi}(t) - \overline{\psi}(t)] \\ \text{共役式をとって } \overline{\psi}(t) + \overline{t}\overline{\psi}(t) + \overline{\psi}(t) &= \overline{\psi}(t) + \overline{t}\overline{\psi}(t) + \overline{\psi}(t), \frac{1}{\mu} [k_1\overline{\psi}(t) - \overline{t}_1\overline{\psi}(t) - \overline{\psi}(t)] = \frac{1}{\mu} [k_1\overline{\psi}(t) - \overline{t}_1\overline{\psi}(t) - \overline{\psi}(t)] \end{aligned} \right\} (6)$$

ここで $t_1 = Re^{i\theta}$, $\mu = E/2(1+\nu)$, $k = (3-\nu)/(1+\nu)$ (E : ヤング率, ν : ポアソン比) でワズクス "P" および "r" はそれぞれ、リニクを意味する。

式(5)および(6)に式(4)を代入して Cauchy 積分を行えば次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} -\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k - \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c}_k R^{k-1} z^{(k-1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c}_k R^k z^k &= 0 \\ -\sum_{k=1}^{\infty} \overline{c}_k R^k z^k - R^2 \left\{ c_1 z^{-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{-(k+2)} \right\} - \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k &= 0 \\ \left[-\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right] - \left[R \left(-\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \right) - L \left(-\sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c}_k R^{k-1} z^{(k-1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c}_k R^k z^k \right) \right] &= -\frac{q}{16\pi} \left\{ 2i u R^2 + 8c^* \left(-\frac{q}{2} - i u \right) R^2 z^{-1} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{3}{2} i R^2 - i \left(-L^2 + u^2 + \frac{17}{2} c^* \right) R^2 \right) z^2 + i \frac{3}{2} u R^2 z^3 + \frac{1}{2} R^2 z^4 \right\} \\ \left[R \left(-\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right) \right] - \left[R \left(-\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \right) - L \left(-\sum_{k=1}^{\infty} k \overline{c}_k R^{k-1} z^{(k-1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c}_k R^k z^k \right) \right] &= -\frac{q}{16\pi} \left\{ 4\delta c^* \left(-\frac{q}{2} - i u \right) R^2 \right. \\ &\quad \left. + 2i u R^2 z^{-1} + L \left\{ \frac{3}{2} i R^2 - i \left(-L^2 + u^2 + \frac{17}{2} c^* \right) R^2 \right\} z^2 - \left(\frac{3}{2} u R^2 z^3 + \frac{1}{2} R^2 z^4 \right) \right\} \\ \left[R^2 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{(k+2)} - \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k \right] - \left[\sum_{k=1}^{\infty} \overline{c}_k R^k z^k - R^2 \left(c_1 z^{-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{-(k+2)} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k \right] &= -\frac{q}{16\pi} \left\{ \frac{3}{2} c^* R^2 z^{-1} \right. \\ &\quad \left. + i \left(L^2 - u^2 + \frac{3}{2} c^* \right) R^2 z^2 - \frac{3}{2} u R^2 z^3 - \frac{1}{2} R^2 z^4 \right\} \\ \left[4 \left(R \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{(k+2)} - \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k \right) \right] - \left[R \left(-\sum_{k=1}^{\infty} \overline{c}_k R^k z^k \right) - L \left\{ -R^2 \left(c_1 z^{-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{-(k+2)} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k \right\} \right] &= -\frac{q}{16\pi} \left\{ \left(R - \frac{1}{4} \right) \frac{q}{2} c^* R^2 z^{-1} + \left(R^2 \left(L^2 - u^2 + \frac{3}{2} c^* \right) R^2 z^2 - \frac{3}{2} u R^2 z^3 - \frac{1}{2} R^2 z^4 \right) \right\} \end{aligned} \right\} (7)$$

$$\text{ここで } P = k/\mu, L = 1/\mu$$

式(7)および(8)の両辺において z の同一べき数の係数を比較すれば、未定係数 $a_1 \sim a_4, b_1 \sim b_4, c_1 \sim c_4, d_1 \sim d_4$ および $a_1 \sim d_1$ に関する連立方程式がえられ、これを解くことにより付加能力函数 $\overline{\psi}(z)$, $\overline{\psi}(z)$ および $\overline{\psi}(z)$, $\overline{\psi}(z)$ が決定される。したがって、所要の能力函数 $\overline{\psi}(z)$, $\overline{\psi}(z)$ および $\overline{\psi}(z)$, $\overline{\psi}(z)$ は次式のごとく求えられる。

$$\left. \begin{aligned} \text{ほりとリニクに対して } \overline{\psi}(z) &= \frac{qR^2}{16\pi} \left[A_1 \frac{z}{R} + i A_2 \frac{z}{R} + i A_3 \frac{z}{R} + i A_4 \frac{z}{R} + (A_1 + i A_2) \frac{z^2}{R} + (A_1 + i A_2) \frac{z^2}{R} + (A_3 + i A_4) \frac{z^3}{R} + (A_3 + i A_4) \frac{z^3}{R} \right] \\ \overline{\psi}(z) &= \frac{qR^2}{16\pi} \left[(B_1 + i B_2) \frac{z}{R} + i B_3 \frac{z}{R} + i B_4 \frac{z}{R} + i B_5 \frac{z}{R} + \frac{B_1}{R} + i \frac{B_2}{R} + (B_3 + i B_4) \frac{z^2}{R} + (B_3 + i B_4) \frac{z^2}{R} + i B_5 \frac{z^3}{R} + i B_6 \frac{z^3}{R} \right] \\ \text{リニグトに対して } \overline{\psi}(z) &= \frac{qR^2}{16\pi} \left[C_1 \frac{z}{R} + i C_2 \frac{z}{R} + (C_1 + i C_2) \frac{z^2}{R} + (C_1 + i C_2) \frac{z^2}{R} + i C_3 \frac{z^3}{R} + i C_4 \frac{z^3}{R} + (C_1 + i C_2) \frac{z^4}{R} + (C_1 + i C_2) \frac{z^4}{R} + i C_3 \frac{z^5}{R} + i C_4 \frac{z^5}{R} \right] \\ \overline{\psi}(z) &= \frac{qR^2}{16\pi} \left[(D_1 + i D_2) \frac{z}{R} + (D_1 + i D_2) \frac{z}{R} + i D_3 \frac{z}{R} + i D_4 \frac{z}{R} + \frac{D_1}{R} + i \frac{D_2}{R} + (D_1 + i D_2) \frac{z^2}{R} + (D_1 + i D_2) \frac{z^2}{R} + i D_3 \frac{z^3}{R} + i D_4 \frac{z^3}{R} \right] \end{aligned} \right\} (9)$$

ここで A_1, A_2, A_3, A_4 などの諸係数は L, u, c^*, P, L, R および P_1 の函数である。

(4) 能力の算定 極座標における能力成分 σ_{θ} および $\tau_{\theta r}$ と能力函数 $\overline{\psi}(z)$, $\overline{\psi}(z)$ との関係は次式の

$$\begin{aligned} \delta_r &= \operatorname{Re}[2\bar{E}(z) - e^{i\theta}(\bar{E}z + E\bar{z})], \quad \delta_\theta = \operatorname{Re}[2\bar{E}(z) + e^{i\theta}(\bar{E}z + E\bar{z})], \\ \bar{U}_\theta &= \operatorname{Im}[e^{i\theta}(\bar{E}z + E\bar{z})] \end{aligned} \quad (10)$$

こゝに $\operatorname{Re}[\]$ 内の虚数部を, $\operatorname{Im}[\]$ 内の虚数部分をそれぞれ意味する。

式(10)に式(9)を代入することにより所要の応力成分が次式のごとく求められる。

$$\begin{aligned} \text{はりについて} \quad \delta_r &= \frac{9R^2}{24t} [2A_1' + 6A_2' - 2(A_3' - 6A_4') \sin \theta - (B_1' + 4A_1' - 3b_3' L_1') \cos 2\theta + (B_1' - 4A_1' L_1' + 3b_3' L_1') \sin 2\theta \\ &\quad - (10A_2' L_1' - 4b_4' L_1') \cos 3\theta + (4A_2' L_1' + 2B_2' L_1' - 10A_2' L_1' + 4b_4' L_1') \sin 3\theta + (3B_2' L_1' - 18A_2' L_1' \\ &\quad + 5b_5' L_1') \sin 4\theta + (4B_2' L_1' - 28A_2' L_1' + 6b_6' L_1') \sin 5\theta] \\ \delta_\theta &= \frac{9R^2}{24t} [2A_1' - 6A_2' - (6A_2' L_1' + 2b_3' L_1') \sin \theta + (B_1' - 3b_3' L_1') \cos 2\theta - (12A_2' L_1' + B_1' + 3b_3' L_1') \sin 2\theta \\ &\quad + (2A_2' L_1' - 4b_4' L_1') \cos 3\theta - (20A_2' L_1' + 2B_2' L_1' - 2A_2' L_1' + 4b_4' L_1') \sin 3\theta - (3B_2' L_1' - 6A_2' L_1' \\ &\quad + 5b_5' L_1') \sin 4\theta + (12A_2' L_1' - 4B_2' L_1' - 6b_6' L_1') \sin 5\theta] \\ \bar{U}_\theta &= \frac{9R^2}{24t} [2A_1' L_1' - 2b_3' L_1') \cos \theta + (B_1' - 2A_1' L_1' + 3b_3' L_1') \sin 2\theta + (B_1' + 6A_2' L_1' + 2A_1' L_1' - 3b_3' L_1') \cos 2\theta \\ &\quad - (6A_2' L_1' - 4b_4' L_1') \sin 3\theta + (12A_2' L_1' + 2B_2' L_1' + 6A_2' L_1' - 4b_4' L_1') \cos 3\theta + (3B_2' L_1' + 12A_2' L_1' \\ &\quad - 5b_5' L_1') \cos 4\theta + (4B_2' L_1' + 20A_2' L_1' - 6b_6' L_1') \cos 5\theta] \\ \text{リグテンバー} \quad \delta_r &= \frac{9R^2}{24t} [2(C_1' + d_1' L_1' - C_2' L_1' - 2d_2' L_1') \sin \theta - (D_1' + 4C_1' L_1' - 3d_3' L_1') \cos 2\theta + (D_1' - 4C_1' L_1' + 3d_3' L_1') \sin 2\theta \\ &\quad - (4C_2' L_1' + 2D_2' L_1' + 10C_2' L_1' - 4d_4' L_1') \cos 3\theta + (4C_2' L_1' + 2D_2' L_1' - 10C_2' L_1' + 4d_4' L_1') \sin 3\theta \\ &\quad + (10C_2' L_1' + 3D_2' L_1' - 18C_2' L_1' + 5d_5' L_1') \sin 4\theta + (18C_2' L_1' + 4D_2' L_1' - 28C_2' L_1' + 6d_6' L_1') \sin 5\theta] \\ \delta_\theta &= \frac{9R^2}{24t} [2C_1' - d_1' L_1' - (6C_2' L_1' + 2d_2' L_1') \sin \theta + (12C_2' L_1' + D_1' - 3d_3' L_1') \cos 2\theta - (12C_2' L_1' + D_1' - 3d_3' L_1') \sin 2\theta \\ &\quad + (20C_2' L_1' + 2D_2' L_1' + 2C_2' L_1' - 4d_4' L_1') \cos 3\theta - (20C_2' L_1' + 2D_2' L_1' - 2C_2' L_1' + 4d_4' L_1') \sin 3\theta \\ &\quad - (30C_2' L_1' + 3D_2' L_1' - 6C_2' L_1' + 5d_5' L_1') \sin 4\theta - (42C_2' L_1' + 4D_2' L_1' - 12C_2' L_1' + 6d_6' L_1') \sin 5\theta] \\ \bar{U}_\theta &= \frac{9R^2}{24t} [(2C_2' L_1' - 2d_2' L_1') \cos \theta + (6C_2' L_1' + D_1' - 2C_1' L_1' + 3d_3' L_1') \sin 2\theta + (6C_2' L_1' + D_1' + 2C_1' L_1' \\ &\quad - 3d_3' L_1') \cos 2\theta + (12C_2' L_1' + 2D_2' L_1' - 6C_2' L_1' + 4d_4' L_1') \sin 3\theta + (12C_2' L_1' + 2D_2' L_1' + 6C_2' L_1' \\ &\quad - 4d_4' L_1') \cos 3\theta + (20C_2' L_1' + 3D_2' L_1' + 12C_2' L_1' - 5d_5' L_1') \cos 4\theta + (30C_2' L_1' + 4D_2' L_1' \\ &\quad + 20C_2' L_1' - 6d_6' L_1') \cos 5\theta] \end{aligned} \quad (11)$$

$$z = r - i/r$$

B. 中央集中荷重を受ける単純はり, C. 自由端ト集中荷重を受ける片持はりおよびD. 等分布荷重の片持はりについても同一手法で解けばよく, 結果は割愛する。

3. 算例および考察 A. 等分布荷重を満載する単純はり はりのリングとα結合部における応力の最大値の大きさをδ₀と第1象限, 第2象限に与えヤング率αはμ₀/μ₁変数とし(図-2~図-4)に示す。

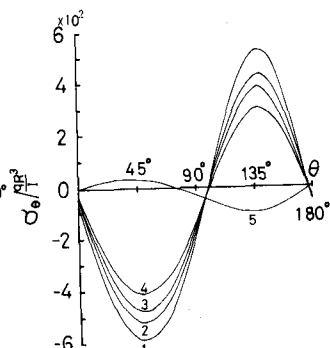
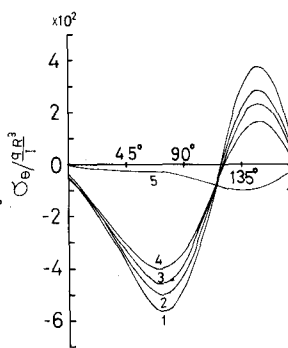
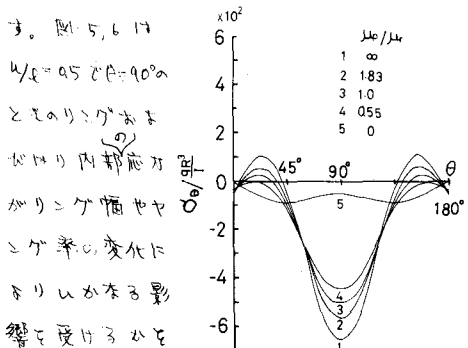


図-2 $\mu_0/\mu_1 = 0, \nu_0/\nu_1 = 1.10$

図-3 $\mu_0/\mu_1 = 0.5, \nu_0/\nu_1 = 1.10$

図-4 $\mu_0/\mu_1 = 0.8, \nu_0/\nu_1 = 1.10$

なお、スパンや断面に関して

は $R/r = 0.4$, $r/a = 10$, $\frac{b \cdot c}{t \cdot w} = 0.64$ を用い, $\mu_p/\mu_r = 0.3$ とした。

図-2～図-4を参照して,

はりの結合部における応力分布

は r/a の値をまち 孔の位置と

より大きな差異を生じるが,

最大応力は孔の位置の如何を

問わず計算に取りとり μ_p/μ_r

の範囲で常に約4～6の応力比である。また, μ_p/μ_r の減少に伴い最大応力は低下する。したがって, はりに対してより剛なるリングで孔縁を補強することにより最大応力を減じることができ, 許容応力以下に抑えることが可能となる。

図-5および図-6より $\theta = 90^\circ$ 断面の応力は, μ_p/μ_r すなわちヤング率の比を減じ, R/r すなわちリング幅を増やしたことで減少することが認められる。また, $\mu_p/\mu_r = 0$ および $R/r = 1.40$ の場合の応力はいずれも無孔ばりの応力よりも小さい。

以上を考慮して有孔はりにおいて応力集中を避けるには, リングのヤング率をより大きくするか幅をより大きなものとするにより解決でき, かつリングのヤング率と幅の適当な組合せにより, 有孔ばりの応力を無孔ばりのそれより低いものとすることも可能である。

B. 中央集中荷重を受ける単純はり, C. 自由端集中荷重を受ける片持はりおよびD. 等分布荷重の片持はりについてAと同一傾向が考察されるが, ここでははりの結合部にける応力分布例を図-7～図-9を示すと定める。

4. 結論 本論文は補強円孔を有する工型ばりの弾性応力を複素変数法により求め, いかなる補強を行えば応力集中が避けられるかについて論じたものであり, 補強リングの幅およびヤング率と応力との関係を定量化し, 応力集中量を正確に求めたものである。なお次の課題としてリ

ング厚の効果と任意形補強孔をもつはりの解析が考えられるが, これについては後日発表の予定である。最後に数値計算は本学電子計算機中COM230-66におこなったこととを付記する。

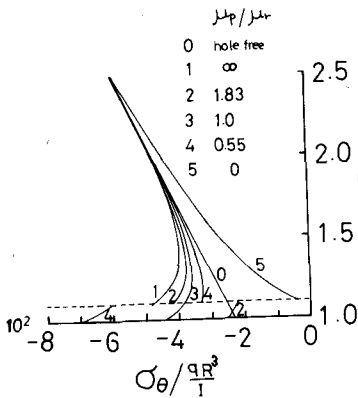


図-5 $R/r = 1.10$, $\theta = 90^\circ$

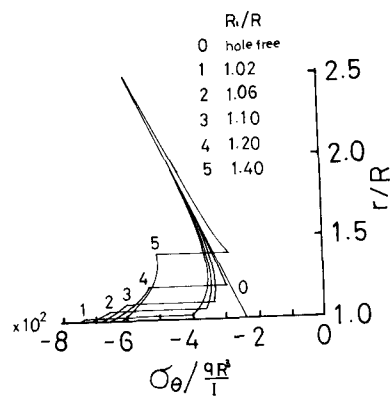


図-6 $\mu_p/\mu_r = 0.55$, $\theta = 90^\circ$

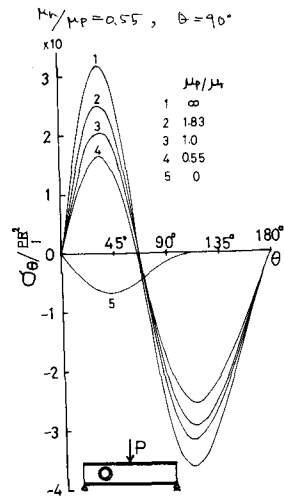


図-7

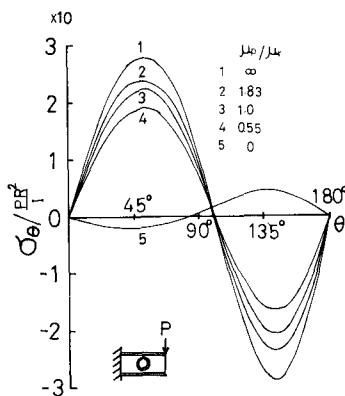


図-8

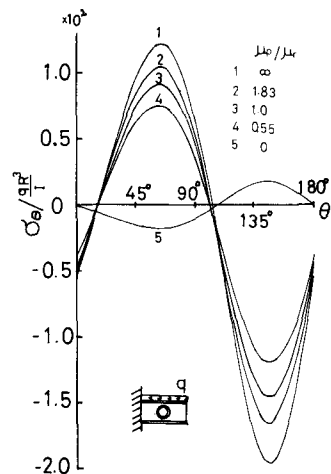


図-9