

宮崎県庁 正員 藤本 坦

宮崎大学 正員 太田俊昭

九州大学 正員 山崎徳世

I. 序言

先に著者らは、補正エネルギー法による静定ばりの弾塑性解析を行ない、その有限変形¹⁾と残留応力の効果²⁾、さらには荷重の種類などの影響について考察してきたが、本研究ではさらにこれを統合拡張して、これらの要素を考慮する一般理論解を提示し、任意の組合せ荷重を受ける不静定骨組構造物の2次元解析を試みるものとする。

すなわち、本論文の骨子は、任意の軸力と曲げモーメントの組合せ負荷を受ける直線部材に対して変形の2次的効果を考慮したたわみ角式を誘導し、かつそのプログラムを製作して実際の連続ばり、およびラーメンの弾塑性変形ならびに応力をComputerを用いて追跡しようようにしたものである。

II. たわみ角式の誘導

直線部材ABを図-1に示すようにN等分すれば各分割点 i の曲げモーメント M_i および軸力 N_i は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} M_i &= x_i Q_{AB} + M_{AB} + y_i H_{AB} + M_i^0 \\ N_i &= Q_{AB} \sin \theta_i - H_{AB} \cos \theta_i \end{aligned} \right\} \text{----- (1)}$$

$$\text{ここに, } Q_{AB} = -(M_{AB} + M_{BA} + y_{N+1} H_{AB}) / x_{N+1} \text{----- (2)}$$

ただし, $x_i = \lambda \sum_{k=1}^i \cos \theta_k$, $y_i = \lambda \sum_{k=1}^i \sin \theta_k$, M_i^0 : 中間荷重による分割点 i のモーメント

M_{AB}, M_{BA} : 材端A, Bに働く端モーメント, Q_{AB}, H_{AB} : 材端Aに働く垂直および水平反力

θ_i : 分割部材 $i, i+1$ の変形後の部材軸と水平軸とのなす交角

ここで、式(1)の第1式に式(2)を代入のうえ、 $1 - x_i/x_{N+1} = g_i$, $-x_i/x_{N+1} = h_i$ とおけば次式をうる。

$$M_i = h_i M_{AB} + g_i M_{BA} + y_i H_{AB} + M_i^0 \text{----- (3)}$$

次に、このほりに与えられる補正エネルギーを求めれば”

$$C = \iint \phi (1 + \epsilon) dM ds + \iint \epsilon dN ds - \int \theta \frac{dM}{ds} ds + \int H (\cos \theta - 1) ds + \int V \sin \theta ds \text{----- (4)}$$

式(4)に変分原理を適用して材端A, Bのたわみ角 ζ_A, ζ_B を求めれば、高次の微小項を省略して次のようにえられる。

$$\left. \begin{aligned} \partial C / \partial M_{AB} = \zeta_A - R &= \int \phi (1 + \epsilon) \frac{\partial M}{\partial M_{AB}} ds \\ \partial C / \partial M_{BA} = \zeta_B - R &= \int \phi (1 + \epsilon) \frac{\partial M}{\partial M_{BA}} ds \end{aligned} \right\} \text{----- (5)}$$

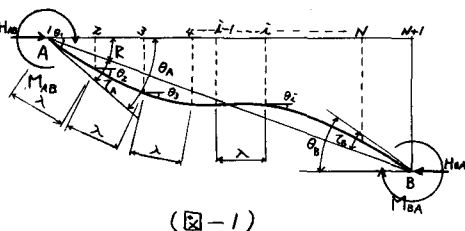
ただし, θ_A, θ_B : 節点A, Bの回転角, R : 部材回転角, ϵ : 図心点のひずみ

式(5)に式(3)を代入して、かつ ϕ を弾性曲率 $\phi_e = M/EI$ と塑性曲率 ϕ_p との和で表わせば

$$\theta_A - R = \int (\phi_e + \phi_p) (1 + \epsilon) h_i ds$$

$$\theta_B - R = \int (\phi_e + \phi_p) (1 + \epsilon) g_i ds$$

故に



$$\begin{aligned}\theta_A - R &= \frac{1}{EI} \left\{ \left(\int k^2 (1+\epsilon) ds \right) M_{AB} + \left(\int k g (1+\epsilon) ds \right) M_{BA} + \left(\int M^0 k (1+\epsilon) ds + \int H_{AB} y k (1+\epsilon) ds + EI \int \phi^p k (1+\epsilon) ds \right) \right\} \\ \theta_B - R &= \frac{1}{EI} \left\{ \left(\int k g (1+\epsilon) ds \right) M_{AB} + \left(\int g^2 (1+\epsilon) ds \right) M_{BA} + \left(\int M^0 g (1+\epsilon) ds + \int H_{AB} y g (1+\epsilon) ds + EI \int \phi^p g (1+\epsilon) ds \right) \right\}\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}EK(\theta_A - R) &= a M_{AB} + b M_{BA} + C_1 \\ EK(\theta_B - R) &= b M_{AB} + d M_{BA} + C_2\end{aligned} \quad \text{----- (6)}$$

ここに, $a = \int k^2 (1+\epsilon) ds / l$, $b = \int k g (1+\epsilon) ds / l$, $d = \int g^2 (1+\epsilon) ds / l$, l : 標準長, $K = I / l$,

$C_1 = \int M^0 k (1+\epsilon) ds / l + H_{AB} \int y k (1+\epsilon) ds / l + EI \int \phi^p k (1+\epsilon) ds / l$, EI : 曲げ剛さ,

$C_2 = \int M^0 g (1+\epsilon) ds / l + H_{AB} \int y g (1+\epsilon) ds / l + EI \int \phi^p g (1+\epsilon) ds / l$, $\phi^p = \phi - M / EI$

式(6)を M_{AB} , M_{BA} について解いて次のたわみ角式をうる。

$$\begin{aligned}M_{AB} &= EK(\alpha_{AB} \theta_A + \beta_{AB} \theta_B + \gamma_{AB} R) + C_{AB} \\ M_{BA} &= EK(\beta_{BA} \theta_A + \alpha_{BA} \theta_B + \gamma_{BA} R) + C_{BA}\end{aligned} \quad \text{----- (7)}$$

ここに, $\alpha_{AB} = -d / (\epsilon^2 + ad)$, $\alpha_{BA} = -a / (\epsilon^2 + ad)$, $\gamma_{AB} = -(\alpha_{AB} + \beta_{AB})$

$\beta_{AB} = b / (\epsilon^2 + ad)$, $\beta_{BA} = b / (\epsilon^2 + ad)$, $\gamma_{BA} = (\alpha_{BA} + \beta_{BA})$

$C_{AB} = (d C_1 + b C_2) / (\epsilon^2 + ad)$, $C_{BA} = (a C_2 + b C_1) / (\epsilon^2 + ad)$

式(7)を降伏曲げモーメントで除して無次元化すれば結局次式をうる。

$$\begin{aligned}\bar{M}_{AB} &= (\alpha_{AB} \theta_A + \beta_{AB} \theta_B + \gamma_{AB} R) / \omega + \bar{C}_{AB} \\ \bar{M}_{BA} &= (\beta_{BA} \theta_A + \alpha_{BA} \theta_B + \gamma_{BA} R) / \omega + \bar{C}_{BA}\end{aligned} \quad \text{----- (8)}$$

ただし, $\bar{M} = M / M_y$, $\bar{C}_{AB} = C_{AB} / M_y$, $\bar{C}_{BA} = C_{BA} / M_y$, $\omega = M_y / EK = \phi_y l$, M_y : 降伏曲げモーメント

ここで, 式(8)の係数を規定する θ_i は文献(1)より, 次式で算定される。

すなわち, 部材 AB の分割点 i において

$$\theta_i = \theta_{i-1} - \frac{\omega \bar{\lambda}}{6} \left\{ \varphi_{i-1} (1 + 0.5 \epsilon_{i-1} + 0.5 \epsilon_i) + \varphi_i (4 + 0.5 \epsilon_{i-1} + 3 \epsilon_i + 0.5 \epsilon_{i+1}) + \varphi_{i+1} (1 + 0.5 \epsilon_i + 0.5 \epsilon_{i+1}) \right\} \quad (9)$$

ただし, $\bar{\lambda} = \lambda / l$, $\varphi = \phi / \phi_y$, $i = 2 \sim N$

III. 解法

式(8), (9)を使用することにより, 従来のたわみ角式に準じて, 不静定構造物の応力および変形の解析が可能となる。ただし式(9)を使用する場合に θ_1 もしくは θ_N の値を既知としなければならぬが, 次の変形の適合条件により決定される。

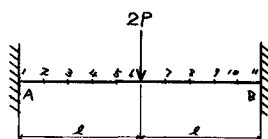
すなわち

$$y_{N+1} = x_{N+1} \tan R \quad \text{----- (10)}$$

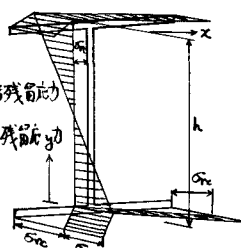
以下実例を用いて概説する。

1). 両端固定梁

集中荷重 $2P$ が中央点に作用する図-2-(a)の両端固定梁について計算する。境界条件より $\theta_A = 0$, $\theta_B = 0$, $H_{AB} = 0$, $R = 0$ であるゆえ不静定モーメント M_{AB} , M_{BA} は式(8)よりそれぞれ次のごとくえられる。



(図-2-a)



(図-2-b)

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= C_{AB} = (dC_1 - bC_2) / (b^2 - ad) \\ M_{BA} &= C_{BA} = (aC_2 - bC_1) / (b^2 - ad) \end{aligned} \right\} \text{----- (11)}$$

よって任意点 x のモーメント M_x は式(1)より次式で与えられる。

$$M_x = r_x M_{AB} + g_x M_{BA} + P X_x \text{----- (12)}$$

一方、中央点のため δ_c は変分原理により $\delta_c = \partial C / \partial P = \int \phi(1+\varepsilon) X_x ds$

$$\text{上式を無次元化して、次式をえる、} \quad \delta_c / l = \bar{\delta}_c = w \int \phi(1+\varepsilon) \bar{x} d\bar{s} \text{----- (13)}$$

図-3は図-2-(b)のごとく初期残留応力を有する梁を10等分した場合の荷重-たわみ曲線を求め図示したものである。

2. 門型ラーメン

図-4のごとき集中荷重を受ける門型ラーメンについて計算する。構造はらびに載荷条件を考慮すれば、不静定モーメントは式(8)より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= (\beta_{AB} \theta_B + \gamma_{AB} R) / w + C_{AB} \\ M_{BA} &= (\alpha_{BA} \theta_B + \gamma_{BA} R) / w + C_{BA} \\ M_{BC} &= (\alpha_{BC} \theta_B + \beta_{BC} \theta_B) / w + C_{BC} \end{aligned} \right\} \text{----- (14)}$$

次に節点方程式および層方程式がそれぞれ次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} + M_{BC} &= 0 \\ M_{AB} + M_{BA} &= -\frac{7}{4} P / P_y \end{aligned} \right\} \text{----- (15)}$$

式(15)に式(14)を代入して θ_B, R について解けば

$$\theta_B = w \{ \gamma_{BA} (\frac{7}{4} P / P_y + C_{AB} - C_{BC}) - \gamma_{AB} (C_{BA} + C_{BC}) \} / \{ \gamma_{AB} (\alpha_{BA} + \alpha_{BC} + \beta_{BC}) + \gamma_{BA} (\alpha_{BC} - \beta_{AB} + \beta_{BC}) \}$$

$$R = \{ (\alpha_{BA} + \alpha_{BC} + \beta_{BC}) \theta_B + w (C_{BA} + C_{BC}) \} / \gamma_{BA}$$

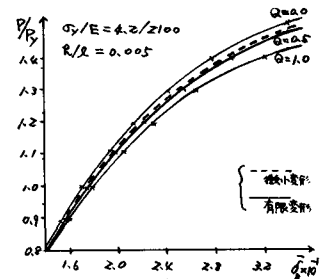
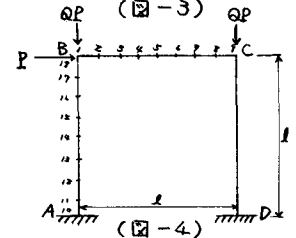
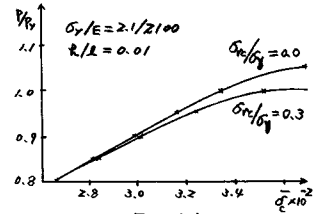
上式より θ_B, R が求められ、さらに不静定モーメント M_{AB}, M_{BA}, M_{BC} が定められる。また、節点Bの水平移動量は $\delta_B = X_{10} \tan R$ で与えられる。

各部材を8等分した場合の $P/P_y - \delta_B / l$ 曲線を図-5に示す。

IV. 結語

本研究によって、不静定骨組構造物の弾塑性解析が一般的に可能となった。すなわち、本法は長大橋や高層建築に生ずる有限変形効果や鋼材個々の残留応力などの要素を考慮しうるほか、従来の弾性たわみ角法と同様、構造および荷重条件の如何を問わず広く適用できる利点を有するものである。

なお、本計算には宮崎大学電子計算機 FACOM 270-20/30 を使用した。



(図-5)

V. 参考文献

- 1) 太田; “有限変形理論による軸力の影響を考慮したはりの弾塑性解析” 第24回年次学術講演会講演集, 才ノ部 (昭和44年9月)
- 2) 太田; “残留応力の影響を考慮した鋼材の弾塑性解析” 第19回応用力学連合講演会論文抄録 (昭和44年10月)
- 3) 堀井・河原; “有限変形を考慮した平面骨組構造物の弾塑性解析法” 土木学会論文集 NO. 169, 1969-9