

I-72 格子桁の最小重量設計について

大阪市立大学 工学部 正員 倉田 宗章
大阪市立大学 工学部 正員 園田 恵一郎

1. まえがき

塑性解析に基づいた骨組みの最小重量設計の問題に対しては主として二通りの解析方法がある。一つは J. Foulkes によって与えられた定理：「 n 個の設計変数を持つ骨組みの最小重量設計は考えられるすべての Mechanism についての仕事の不等式を満足し、かつ Weight Compatible Mechanism を得ることができる設計に相当する。」を用いて解を直接に見出す方法と、もう一つは最小重量設計の上界定理ともいわれる定理：「与えられた荷重（設計荷重を安全係数倍したもの）の下で少くとも一つの静的許容、かつ安全な応力場をつくることができる設計は最小重量設計より必ず重量が大きい、または等しい。」を用いて極値問題として最適解を見出す方法がある。後者は前者に比して計算自体は煩雑であるが、数値計画法の問題として取扱えば組織的かつ機械的に解析でき、既にトラス、連続桁、ラーメンに対して線型計画法の問題として解析した R. Livesley⁽¹⁾, J. Heymann and W. Prager⁽²⁾, 田中⁽³⁾らの研究が発表されている。本研究は集中荷重および分布荷重、またはそれらの変動荷重を受ける格子桁の最小重量設計の問題を数値計画法、特に凸計画法の問題に置き換えて解析したものである。

2. 問題の定式化

格点間において部材は等断面であると仮定し、設計変数： $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ として n 個の部材のそれぞれの全塑性曲げモーメントに選り、格点上の部材断面に作用する曲げモーメントおよびねじりモーメントを $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_{3n})$ とする。一般に重量 w は各部材の塑性断面係数の関数として表わすことができるから、この問題は

$$g_i(y) = \mu P_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 3m) \quad (1)$$

$$f_j(y, x) \leq 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, r, \quad r \leq 3n) \quad (2)$$

の下で $w(x)$ を最小にする x を求めることになる。ここに、 P_i は設計荷重の格点 i に關与する成分、 μ は安全係数、 m は格点数であり、式(1)は応力つりあい条件式、式(2)は降伏条件式を犯さないことを意味している。

(i) 重量関数 $w(x)$

I型および箱型断面を対象として、日本溶接協会編：塑性設計基準案にて許される最大幅厚比と最大ウェブ高さを持つ断面に対して、同じ塑性断面係数 Z_p を持つ断面の中で面積を最小にするものを選び出すと図-1のようになる。最小断面における断面積 $A(\text{cm}^2)$ と $Z_p(\text{cm}^2)$ との関係はほぼ三次曲線によって精度良く表わすことができるが、実際の計算に際してはつぎのように区分的線型化する方法が都合が良い。

I型断面

$$A = 0.0428 Z_p + 15.7, \quad 100 \leq Z_p \leq 1,500, \quad A = 0.0273 Z_p + 39.0, \quad 1,500 \leq Z_p \leq 4,500$$

$$A = 0.0202 Z_p + 71.1, \quad 4,500 \leq Z_p \leq 9,000$$

箱桁断面

$$A = 0.0462 Z_p + 28.5, \quad 400 \leq Z_p \leq 2,000$$

$$A = 0.0317 Z_p + 57.5, \quad 2,000 \leq Z_p \leq 5,500$$

$$A = 0.0243 Z_p + 99.0, \quad 5,500 \leq Z_p \leq 10,000$$

$$A = 0.0214 Z_p + 127.0, \quad 10,000 \leq Z_p \leq 15,000$$

(ii) 応力つりあい条件式

後に示す凸計画法の問題として取り扱う際に都合なためモーメント変数はすべて非負なる値として取り扱う。すなわち曲げモーメント変数に対しては部材の全塑性モーメント分だけ、またねじりモーメント変数は全塑性ねじりモーメント分だけ座標軸を負の方へ移行する。こうして各格点に関して応力つりあい条件式を作れば、

$$[A] \begin{Bmatrix} \{y\} - \{T\} \{x\} \{I\}^T \\ \{x\} \end{Bmatrix} = [P] \quad (3)$$

$3m \times 3n \quad 3n \times l \quad 3m \times n \quad n \times l \quad l \times l \quad 3m \times l$

こゝに、 $[A]$ ：格子桁の幾何学的形状より定まるマトリックス、 $\{y\}$ ：モーメント変数、 $\{T\}$ ：座標変換のために必要となるマトリックス、 $\{x\}$ ：設計変数、 $[P]$ ：荷重項、 $\{I\}^T$ ：すべての要素が1なる行マトリックス、 l ：荷重の変動する回数

(iii) 降伏条件式

隣接する格点 i, j の間の部材において降伏条件式を犯さないためには、

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{(M_{ij} - X_{ij})^2 + \frac{1}{\beta_{ij}^2} (T_{ij} - \beta_{ij} X_{ij})^2} - X_{ij} &\leq 0, \quad \sqrt{(M_{ji} - X_{ij})^2 + \frac{1}{\beta_{ij}^2} (T_{ij} - \beta_{ij} X_{ij})^2} - X_{ij} \leq 0 \\ \sqrt{(M_{max} - X_{ij})^2 + \frac{1}{\beta_{ij}^2} (T_{ij} - \beta_{ij} X_{ij})^2} - X_{ij} &\leq 0, \quad M_{max} = \frac{\beta_{ij}}{8} \Lambda_{ij}^2 + \frac{1}{2} (M_{ij} + M_{ji}) + \frac{1}{2\beta_{ij} \Lambda_{ij}^2} (M_{ij} - M_{ji})^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$$(4.3)$$

こゝに、 M_{ij}, M_{ji} ：格点上の曲げモーメント変数、 T_{ij} ：ねじりモーメント変数、 β_{ij} ：部材 ij の全塑性曲げモーメントに対する全塑性ねじりモーメントの比、 X_{ij} ：全塑性曲げモーメント、 Λ_{ij} ：部材長、 β_{ij} ：等分布荷重強度

2. 凸計画法の問題としての計算手順

前節で述べたように線型化した重量関数を用いれば、 $W = C_0 + \{C_i\}^T \{x\}$ と表わされる。式(3)の制約条件式は線型であるが、式(4)のそれは非線型である。降伏条件式の凸性に起因して式(4)の不等式を満足する許容領域は凸性を有するから、この問題は J.E. Kelley の Cutting Plane Method⁽⁴⁾ を用いて解くことができる。すなわち、まず最初に許容領域を包含するような凸多面体となる近似許容領域： $[0] \leq \{y\} \leq 2[T]\{x\}\{I\}^T$ を考え、この近似領域内で式(3)を満足し W を最小にする解 $\{y\}'$ 、 $\{x\}'$ を線型計画法の問題として求める。つぎに、 $\{y\}'$ 、 $\{x\}'$ をすべての部材についての式(4)に相当する不等式に代入し、満足しないものに関して Cutting Plane を作り新しい制約条件式として付け加える。すなわち、式(4.1)と式(4.2)を例にとりて示せば、この新しい制約条件式は

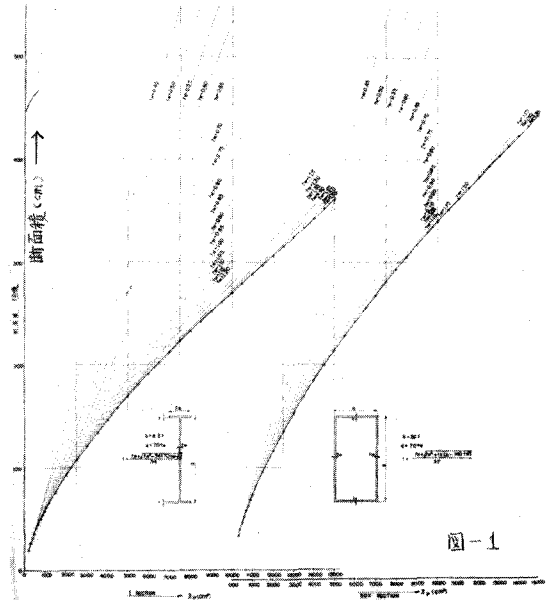


図-1

$$(t_1 - t_3)M_{ij} + \frac{t_2 - \beta_{ij}t_3}{\beta_{ij}^2} T_{ij} - \left\{ \sqrt{(t_1 - t_3)^2 + \frac{1}{\beta_{ij}^2} (t_2 - \beta_{ij}t_3)^2} + (t_1 - t_3) + \frac{t_2 - \beta_{ij}t_3}{\beta_{ij}^2} \right\} X_{ij} \leq 0 \quad (5)$$

$$\left\{ 1 + \frac{2}{\beta_{ij} \Lambda_{ij}^2} (t_1 - t_1') \right\} M_{ij} + \left\{ 1 - \frac{2}{\beta_{ij} \Lambda_{ij}^2} (t_1 - t_1') \right\} M_{ji} + \frac{2(t_2 - \beta_{ij}t_3)}{\beta_{ij}^2 (t_0 - t_3)} T_{ij} - \frac{2}{t_0 - t_3} \left\{ t_0 + \frac{t_2}{\beta_{ij}} - 2t_3 + \sqrt{(t_0 - t_3)^2 + \frac{1}{\beta_{ij}^2} (t_2 - \beta_{ij}t_3)^2} \right\} X_{ij} \leq -\frac{\beta_{ij} \Lambda_{ij}^2}{4} + \frac{1}{\beta_{ij} \Lambda_{ij}^2} (t_1 - t_1')^2 \quad (6)$$

こゝに、 $t_0 = \frac{\beta_{ij} \Lambda_{ij}^2}{8} + \frac{1}{2} (t_1 + t_1') + \frac{1}{2 \beta_{ij} \Lambda_{ij}^2} (t_1 - t_1')^2$ 、 t_1, t_1', t_2, t_3 は最適解 $\{y\}^1, \{x\}^1$ の $M_{ij}, M_{ji}, T_{ij}, X_{ij}$ に相当する値を示す。たゞし、 $t_1 - t_1' \geq \beta_{ij} \Lambda_{ij}^2 / 2$ 或 $t_1 - t_1' \leq -\beta_{ij} \Lambda_{ij}^2 / 2$ なら、曲げモーメントの正の最大値は格点上に起り、式(6)は不要になる。

こうして、制約条件式が付加された新しい線型計画法の問題として $\{y\}^2, \{x\}^2$ を求め、以下、式(4)に相当するすべての不等式も誤差の範囲内で満足するまで繰り返せば、正しい解が得られる。実際の計算にあたっては、式(3)の制約条件式はこのまゝでは取り扱いにくく、また式(5)、式(6)などの追加制約条件式の導入によつても計算が煩雑にならないよう若干の工夫を必要とする。

式(3)より、

$$\begin{aligned} [A_1 | A_2] \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\} - \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \{x\} \{I\}^T &= [P] \\ \therefore \{y\} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [A_1]^{-1} \\ [0] \end{bmatrix} [P] + \begin{bmatrix} -[A_1]^{-1}[A_2] \\ [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [T_1] + [A_1]^{-1}[A_2][T_2] \\ [0] \end{bmatrix} \{x\} \{I\}^T \quad (7) \end{aligned}$$

したがつて、最初の問題はつぎのようになる。

$$\text{Min. } W = \text{Min. } (C_0 + \{c_i\}^T \{x\})$$

$$\begin{bmatrix} -[A_b] & [D_1] \\ [A_b] & [D_2] \\ -[I] & 2[T_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ \{x\} \{I\}^T \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -[P_a] \\ [P_a] \\ [0] \end{bmatrix}, \quad \{y\} \geq [0], \quad \{x\} \geq \{0\}$$

こゝに、 $[A_b] = [A_1]^{-1}[A_2]$ 、 $[P_a] = [A_1]^{-1}[P]$ 、 $[D_1] = [T_1] + [A_b][T_2]$ 、 $[D_2] = [T_1] - [A_b][T_2]$ 、 $[I]$ ：単位行列、 $[0]$ ：ゼロ行列

これは線型計画法の標準形の裏の問題になっているので双対法により表の問題に変換すれば、

$$\text{Max. } (C_0 + [-P_1^T, P_1^T, \{0\}^T, -P_2^T, P_2^T, \{0\}^T, \dots, -P_l^T, P_l^T, \{0\}^T] \{U\})$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} A' \\ 0 \\ 0 \\ I_B' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ U \\ U \\ U \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_i \end{bmatrix}, \quad \{U\} \geq \{0\} \right\} \quad (8)$$

こゝに、
 $A' = [-[A_b]^T | [A_b]^T | -[I]]$
 $I_B' = [D_1]^T | [D_2]^T | 2[T_2]^T$
 $P_i, (i=1, 2, 3, \dots, l)$ は $[P_a]$ の第 i 列を示す。

こうして改訂シンプレックス法により最適解を求める。第 n 回目以後の反復計算によつて制約条件式の数が増加するが、双対問題として取り扱つてゐるため式(8)の係数行列は列の数のみが増加し、行の数は変らなく、それゆゑ、改訂シンプレックス法のタブローにおける逆行列の評価の大きさは変化しない。したがつて第 n 回目以後の反復計算によつて増加する係数行列の列は第 n 回目の相当す

る列を消去して同じ場所に入れることができるので電子計算機の記憶装置を有効に使用することができる。以上の計算手順を Flow Chart によって説明すれば図一スのようになる。

3. 計算例

図一三に示す格子桁が等分布荷重 q と移動線荷重 $p (=10q)$ を受けた場合の計算を行った。主桁は箱型断面を有し、全塑性曲げモーメントに対する全塑性ねじりモーメントの比 $\beta = 0.75$ とし、横桁は工型断面を有し、ねじり抵抗力を無視した。部材は全部で 18 があるが、対称性を考慮して独立な設計変数も 6 個： $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_6)$ とした。移動線荷重が横桁上にある場合は梁の法則によって隣接する横桁に線荷重として配分されるものと仮定すれば、ここで考えている問題が凸計画法の問題とみなすことができるという事実により、線荷重が中央横桁上にある場合とスパンの $1/4$ のどちらか一方の横桁にある場合の 2 case を考えれば十分である。重量関数 $W(x)$ は前節ス一(i)の結果を考慮して、

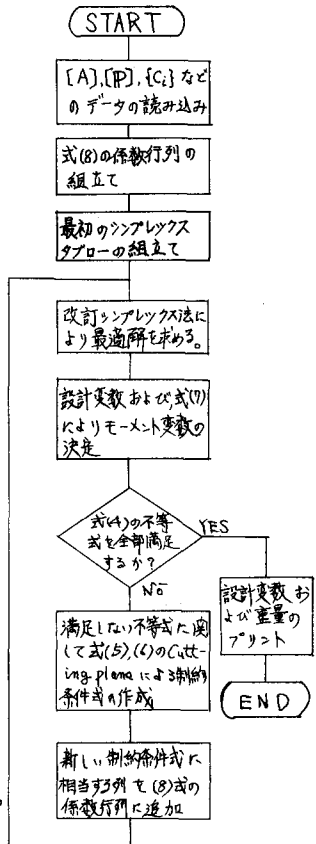
$$\frac{W}{0.0968a} = \frac{1282.2}{0.0968} \sigma_0 + x_1 + x_2 + 0.5x_3 + 0.5x_4 + 0.8845x_5 + 1.769x_6$$
, ここに、 σ_0 : 降伏応力、とおいた。

以上の仮定の下に式(4)の不等式における誤差の許容 $\epsilon = 0.001$, すなわち、不等式の右辺の 0 を 0.001 , として計算すれば、最適設計変数として、

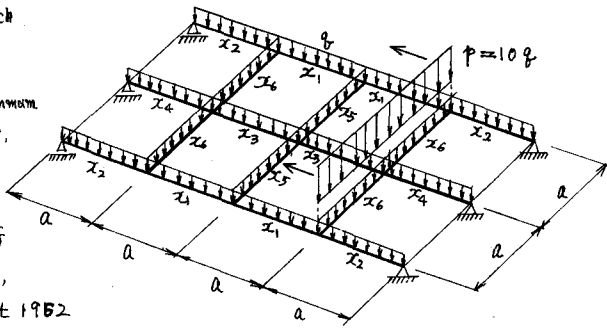
$$x_1 = 15.563 \times \frac{qa^2}{2}, x_2 = 14.063 \times \frac{qa^2}{2}, x_3 = 28.875 \times \frac{qa^2}{2}, x_4 = 16.875 \times \frac{qa^2}{2}, x_5 = 1.375 \times \frac{qa^2}{2}, x_6 = 1.375 \times \frac{qa^2}{2} \text{ を得た。}$$

なお、この問題の計算時間は大阪市立大学計算センター、FACOM-270-30 にて、約 12 分であった。

- (1) R. Livesley : The Automatic Design of Structural Frames, Quart. J. Mech. Appl. Math. Vol.9 1956
- (2) J. Heymann, W. Prager : Automatic Minimum Weight Design of Steel Frames, Jour. Franklin Inst, 226(5) 1958
- (3) H. Tanaka : Automatic Analysis and Design of Plastic Frames, Report of the Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Vol.12. No.3 Sept 1962
- (4) J.E. Kelly, Jr : The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs, J. Soc. Indust. Appl. Math. Vol.8. No.4 Dec 1960



図一2



図一3