I-69　移動荷重を受けるトラスの最適設計法に関する研究

愛媛大学工学部　正員　大久保 禎二

1. まえがき

著者はさきに，構造物の状態変数の影響係数および線型計画法を用いたトラス構造物の最適設計法の理論，および部材の *sub-optimization* により部材の断面積－最大許容応力度の関係曲線を導入することによって，きわめて有利に最適解が得られること，またトラスが固定荷重を受ける場合，上記の理論により，全域的な最適解（トラスの形状および部材断面）が得られることなどを示したが[①]，今回は，さらに複雑なトラス構造物が，移動荷重を受ける場合について，その最適解を求めた結果を報告するものである．

2. 最適設計法の概要

1）<u>概説</u>　本論文に用いた最適設計法の理論については，文献①に詳述してあるが，その概要を簡単にまとめてみると次のようになる．

いま，構造物の最適設計問題を，構造物の状態変数 $Y=G(X)$，および設計変数 X が，次のような設計上の制約条件を満足し，かつ構造物の目的関数 $M=F(X)$ を最大にする X を決定することとする．

$$X_{li} \leq X_i \leq X_{ui} \quad , \quad Y_{lj} \leq Y_j \leq Y_{uj} \qquad ①$$

ところで一般に，上記の Y, Y_l, Y_u および M は X の非線形な関数であるので，これらを設計変数（X）に関してテーラー展開し，二次の微係数以下は微少であるので無視すると，$Y^{(2)}$ および $M^{(2)}$ は近似的に

$$Y^{(2)} = Y^{(1)} + S^{(1)}\Delta X^{(1)} \quad , \quad M^{(2)} = M^{(1)} + C^{(1)}\Delta X^{(1)} \qquad ②$$

と表わすことができる．ここに，S および C は，要素 $S_{ij}=\dfrac{\partial Y_i}{\partial X_j}$，$C_j=\dfrac{\partial M}{\partial X_j}$ よりなるマトリックスで，X の微少変化に対する Y および M の変化量を示す影響係数マトリックスである．一方，設計条件式も設計変数（X）の関数である場合は，同様にして

$$Y_u^{(2)} \fallingdotseq Y_u^{(1)} + D_u^{(1)}\Delta X^{(1)} \quad , \quad Y_l^{(2)} \fallingdotseq Y_l^{(1)} + D_l^{(1)}\Delta X^{(1)} \qquad ③$$

と表わすことができる．ここに，$D_u^{(1)}$（または $D_l^{(1)}$）は $\dfrac{\partial Y_{ui}}{\partial X_j}$（または $\dfrac{\partial Y_{li}^{(1)}}{\partial X_j}$）よりなる行マトリックスである．

②③式を①式に代入し整理すると，

$$\left.\begin{array}{lll} X_u - X^{(1)} \geq \Delta X^{(1)} & , & X_l - X^{(1)} \leq \Delta X^{(1)} \\ \left[S^{(1)} - D_l^{(1)}\right]\Delta X^{(1)} \geq Y_l^{(1)} - Y^{(1)} & , & \left[S^{(1)} - D_u^{(1)}\right]\Delta X^{(1)} \leq Y_u^{(1)} - Y^{(1)} \end{array}\right\} \quad ④$$

を得，最適な設計変数（X）を決定することは，④式の条件式群を満足し，かつ②式の $C^{(1)}\Delta X^{(1)}$ を最小とする $\Delta X^{(1)}$ を決定する問題に帰着することができ，これは線型計画法を用いて解くことができる．この $\Delta X^{(1)}$ を用いて新しい設計変数 $X^{(2)}$ を $X^{(2)}=X^{(1)}+\Delta X^{(1)}$ より求め，上記の計算をくりかえして最適解を求めるものである．

2）<u>トラスの状態変数およびその影響係数</u>　トラスの状態変数として部材の応力（σ）および未知の格点変位 $\overline{U}_1$ を考えると，変位法の理論により，（$\overline{U}_1$），部材力（F），および（σ）は次式より求められる．

$$\left.\begin{array}{l} \overline{U}_1 = (\beta_1 k \alpha_1)^{-1} P_1 = K^{-1} P_1 \quad , \quad F = k \alpha_1 \overline{U}_1 \quad , \quad \sigma = \dfrac{F}{A} \\ \text{ここに，} k = \begin{bmatrix} k_1 & & 0 \\ & k_i & \\ 0 & & k_m \end{bmatrix} \quad , \quad \left(k_i = \dfrac{A_i E_i}{L_i}\right) \end{array}\right\} \quad ⑤$$

$K = \beta_1 k \alpha_1$, P_1：外力のマトリックス

α_1：格点の変位量と部材の変形量との変換マトリックス

β_1：外力 P_1 と部材力 F との変換マトリックス

⑤式より，U_1, F, σ の設計変数 (X_i) に関する影響係数は，次式より求めることができる．

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial U_1}{\partial X_i} &= \frac{\partial K^{-1}}{\partial X_i} P_1 \\
\frac{\partial F}{\partial X_i} &= \frac{\partial k}{\partial X_i} \alpha_1 U_1 + k \frac{\partial \alpha_1}{\partial X_i} U_1 + k\alpha_1 \frac{\partial U_1}{\partial X_i} \\
\frac{\partial \sigma}{\partial X_i} &= \left(\frac{\partial F}{\partial X_i} A - \frac{\partial A}{\partial X_i} F\right) \Big/ A^2
\end{aligned}\right\} \quad ⑥$$

トラスが移動荷重を受ける場合には影響線により解く必要がある．したがって，⑤式および⑥式より U_1, $\partial U_1/\partial X_i$, F, $\partial\sigma/\partial X_i$ の影響線を求め，これより移動荷重による最大の U_1 および σ を求めた．また，影響係数 $\partial U_1/\partial X_i$ および $\partial\sigma/\partial X_i$ は，それぞれ U_1 および σ が最大値をとるような荷重状態について，$\partial U_1/\partial X_i$ および $\partial\sigma/\partial X_i$ の影響線よりその値を計算した．

3) <u>トラスの設計変数</u>　トラス構造物においては，設計変数 (X) として各部材の断面寸法および格点の X, Y 座標が考えられるが，部材の *sub-optimization* を行い，断面積－最大許容応力度関係式を導入することにより，部材の多くの断面寸法を，断面積 (A_i) ただ1つにまとめて考えることができる．(文献①参照) ただしこの場合，各部材の圧縮応力度 (σ_{ci}) は，A_i における次の最大許容圧縮応力度 (σ_{cai}) に等しいか，またはそれ以下でなければならない．すなわち，

$$\sigma_{ci} \leq \sigma_{cai} = \left\{ a(A_i - b) \right\}^{\frac{1}{n}} + C \qquad \text{または} \qquad \sigma_{ci} \leq \sigma_{cai} = dA_i + e \qquad ⑦$$

ここに，a, b, C, d, e, n は，部材の *sub-optimization* により得られた部材長によって異なる定数である．

移動荷重を受けるトラス構造物は，橋梁などに見られるごとく，一般に左右対称な構造物が多いがこのような構造物では，その最適解も左右対称となるので，対称な設計変数については，その両者が同時に等しい量だけ変化すると考えて計算してよい．したがって，左右対称な構造物では，⑥式で考えるべき設計変数 (X_i) の数は，全設計変数の約半数を考慮すればよいことになる．

4) <u>許容応力度の影響係数</u>　⑦式から明らかなように，最大許容圧縮応力度は部材断面積 (A_i) および部材長 (L_i) により変化する．したがって，その部材断面積 (A_i) に対する影響係数 ($\partial\sigma_{cai}/\partial A_i$) は

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{cai}}{\partial A_i} = \frac{1}{n} a \left\{ a(A_i - b) \right\}^{\frac{1}{n}-1} \qquad \text{または} \qquad \frac{\partial \sigma_{cai}}{\partial A_i} = d \\
&\text{ただし} \qquad \partial\sigma_{cai}/\partial A_j = 0 \quad (\text{at } i \neq j)
\end{aligned}\right\} \quad ⑧$$

より求められる．また，その格点の座標に対する影響係数は，断面積－最大許容圧縮応力度曲線の値を用いて数値解析により $\frac{\partial \sigma_{caj}}{\partial X_i} \doteqdot \frac{\Delta \sigma_{caj}}{\Delta X_i}$ として近似的に求めることができる．この場合，$\Delta\sigma_{caj}$ は格点の座標の微少変化量 ΔX_i によってひきおこされる部材 j の部材長 (L_j) の変化による σ_{caj} の変化量である．

5) <u>制約条件式群の作成</u>　以上 2)～4) で求めた状態変数および影響係数を①式の制約条件式に代入すると，

部材の応力度に関して

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial X} - \frac{\partial \sigma_a}{\partial X} \right] \cdot \left\{ \Delta X \right\} \leq \left\{ \sigma_a - \sigma \right\} \qquad \text{ここに } \sigma_a \text{：許容応力度}$$

格点の変位に関して

$$\left[\frac{\partial U_1}{\partial X} \right] \cdot \left\{ \Delta X \right\} \leq \left\{ U_{1a} - U_1 \right\} \qquad \text{ここに } U_{1a} \text{：最大許容変位量} \qquad ⑨$$

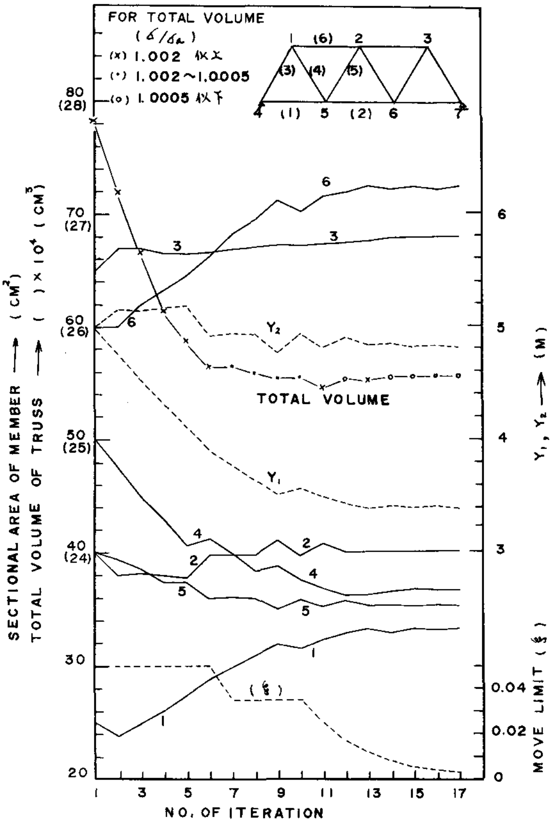
設計変数の変化量 ΔX に関して

$$-\xi X \le \Delta X \le \xi X$$

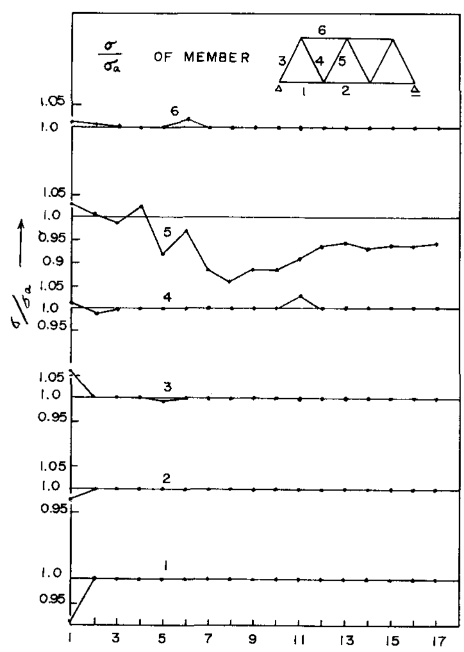
ここに，ξ：ΔXの変化量を制限する係数の，ΔXに関する線型な条件式群を得，LPの手法を用いて最適解を求めることができる．移動荷重により交番応力あるいは交番変位を受ける部材や格点については，その両者につき検討しなければならないが，上記の制約条件式を作成する場合には，その制約条件の厳しい場合についてのみ考慮すれば十分である．

3. 計算例

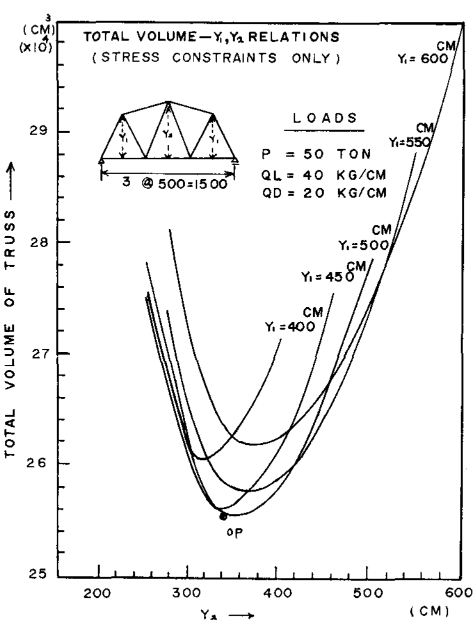
1) 例 1　図-1に示すトラスが，集中荷重50 ton，等分布活荷重 4 ton/m，等分布死荷重 2 ton/m を受ける場合，各部材の断面積（A_i）および格点1，2のY座標Y_1，Y_2を設計変数とし，制約条件として各部材の応力度，および格点5，6の許容垂直変位量を3cmとした場合のトラスの全容積，各部材の断面積，Y_1，Y_2の変化を図-1に示す．Y_1，Y_2の初期値として共に500cmを与えても，最適解では$Y_1 = 340$cm，$Y_2 = 483$ cmとなっている．また，トラスの最小全容積として25.56×10^4 cm^3を得た．また各部材の応力度と許容応力度との比の最大値の各サイクル毎の変化を図-2に示す．この図より，最適解では部材①②③④⑥の応力度はすべて各部材の許容応力度と等しくなっているのに対して部材⑤のみは



第 1 図



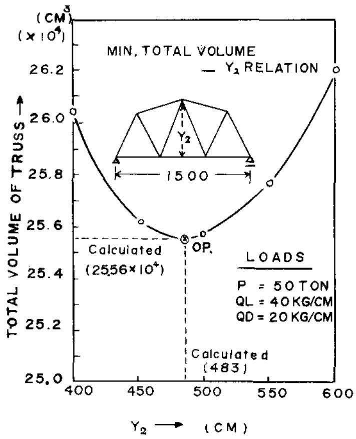
第 2 図



第 3 図

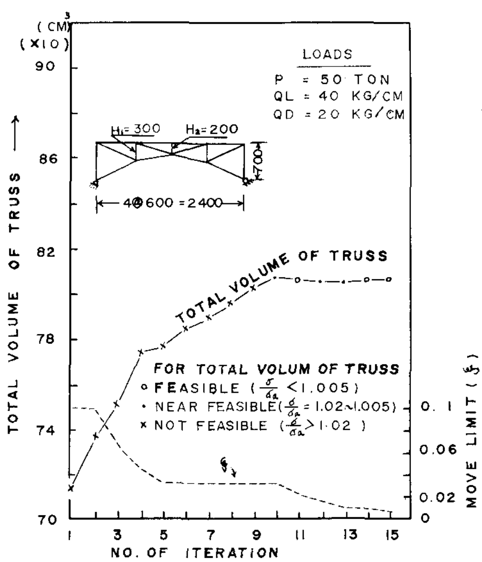
その所要断面積が部材の細長比により決定され，応力については余裕のある断面となっている．また格点②のY座標の最大変位も最適解では 1.388 cm となり，変位の制限3cm に対して余裕のある構造となっている．ところでこのトラスは静定トラスであり，格点変位の制約条件に余裕があり，これによって設計変数が制限を受けないので，このような場合には，種々の Y_1, Y_2 についてトラスを解き，部材力－最小断面積曲線(文献①参照)より各 Y_1, Y_2 に対して最小容積をもったトラスを計算することができる．このようにして求めたトラスの最小容積と Y_1, Y_2 との関係を図-3に示す．また各 Y_2 に対するトラスの最小容積と Y_2 との関係を図-4に示す．図-4より，全域的に最小容積を与えるトラスの Y_2 は 483 cm，その最小容積は 25.56×10^4 cm³，また図-3より，この Y_2 に対する Y_1 は 340 cm であり，この結果は図-1に示す最適解と完全に一致しており，本理論により全域的な最適解を得たことが確められた．

2) 例 2　例1のトラスにおいて，格点5, 6の許容垂直変位量を 1.2 cm とすると，この場合には格点の垂直変位に対する制限が最もきびしい条件となり，最適解として，トラスの全容積 = 27.51×10^4 cm³，部材断面積(A_i)はそれぞれ 31.9, 49.8, 66.9, 46.8, 37.5, 65.5 (cm²)，Y_1 = 403 cm，Y_2 = 519 cm を得た。この結果は全容積に関して例1の 7.6% 増であり Y_1, Y_2 共に例1より大きく，部材応力についても部材 No. 3, 6 のみが $\sigma/\sigma_a = 1.000$ であり，他の 1, 2, 4, 5 は $\sigma/\sigma_a = 0.761 \sim 0.881$ と応力的には余裕のある構造となっている．

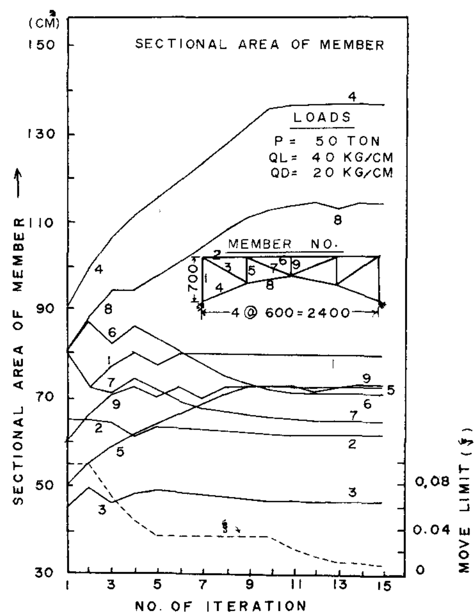


第 4 図

3) 例 3　図-5に示す2ヒンジのスパンドレルブレーストアーチが例1と同様の移動荷重を受ける場合，設計変数として部材の断面積を考え応力の制約条件のみから最適解を求めた結果を図-5および図-6に示す．この例では，各部材の応力度はすべてその部材の許容応力度と完全に等しく，最小容積として 8.0617×10^5 cm³ を得た。



第 5 図



第 6 図

① 大久保 "トラス構造物の最適設計法に関する研究" 土木学会論文集 第177号 1970年5月