I-65 桁の最適設計

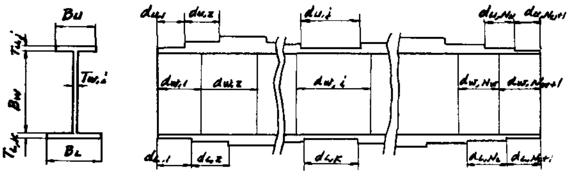
京都大学工学部　正員　山田善一
川崎重工業（株）　正員　○國廣昌史

1．まえがき

土木構造物においては，応力や変形などの制約条件を満足し，かつ経済性に優れているように，構造各部分の形状・寸法を決定することが最も重要なことの一つであろう。ここでは，土木構造物の中で最も基本となる桁の最適設計について述べる。桁を設計する場合，ウェブやフランジの断面寸法やその断面変化位置をどのように決定するかが重要な問題である。溶接桁について云えば，細かく桁を分割して断面を決めれば重量は軽くなるが，溶接費をはじめとする桁の製作費が増大し，結局，適当に断面を変化させなければならない。これについてはDynamic Programing（以下DP）の適用がきわめて有効であることが認められている[1,2]が，本報告でもDPを用いて，従来の設計者の経験や勘にたよらず，電子計算機を用いて，合理的に，溶接桁の，コストを考慮に入れた最適設計を行なってみた。

2．問題の定式化

1）設計変数　図－1に示すようにウェブ，上・下フランジそれぞれについて，巾B_W，B_U，B_L，断面変化位置の総数N_W，N_U，N_L，断面要素の長さ$d_{W,i}$，$d_{U,j}$，$d_{L,k}$，板厚$T_{W,i}$，$T_{U,j}$，$T_{L,k}$が決定されるべき設計変数である。なお，B_W，B_U，B_Lは桁全長にわたり一定とし，かつ，問題を簡単にするために，非合成桁については$B_U=B_L$，合成桁については$B_U=0.65B_L$とする。



図－1　設計変数

2）コスト関数　ここでは，ウェブ，上・下フランジの鋼材費C_Mと，これらの突合せ溶接費C_Sのみを考える。C_Mは材質，板巾B，板厚Tの関数とし，$C_M=C_M(B,T)$。C_SはBと，突合せ溶接される板の小さい方の板厚T^*の関数とし，$C_S=C_S(B,T^*)$。

3）目的関数　図－1に示す桁の総コストC_Pは式（1）のようになり，これが目的関数である。

$$\left.\begin{aligned} C_P &= \rho\sum_{i=1}^{N_W+1} B_W\cdot T_{W,i}\cdot d_{W,i}\cdot C_M(B_W,T_{W,i}) + \rho\sum_{i=1}^{N_U+1} B_U\cdot T_{U,i}\cdot d_{U,i}\cdot C_M(B_U,T_{U,i}) + \rho\sum_{i=1}^{N_L+1} B_L\cdot T_{L,i}\cdot d_{L,i}\cdot C_M(B_L,T_{L,i}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_W} C_S(B_W,T_{W,i}^*)\langle T_{W,i+1}-T_{W,i}\rangle + \sum_{i=1}^{N_U} C_S(B_U,T_{U,i}^*)\langle T_{U,i+1}-T_{U,i}\rangle + \sum_{i=1}^{N_L} C_S(B_L,T_{L,i}^*)\langle T_{L,i+1}-T_{L,i}\rangle \\ &\text{ここに } \rho\text{：鋼材の密度，} T_{j,i}^* = \mathrm{Min}\{T_{j,i+1},T_{j,i}\},\quad \langle T_{j,i+1}-T_{j,i}\rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } T_{j,i+1}=T_{j,i} \\ 1 & \text{if } T_{j,i+1}\neq T_{j,i} \end{cases},\ j=W,U,L \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

4）制約条件　わが国の現行の道路橋の設計示方書によるものとする。その他，板厚，板巾には最大値と最小値の制約をもうけておく。したがって，これらの制約条件のもとで，式（1）を最小にする設計変数を求めるということが，この問題の目的である。

3．桁の最小コスト設計

これは，次の二つの手順に分けて考える。すなわち a）桁全長を細かく分割し，その分割要素について，鋼材費が最小になるように（式（1）の初めの3項のみを考慮）断面を決定する。―― Minimum Material Cost Design。b）製作費（ここでは板の突合せ溶接費）を考慮に入れて，鋼材費と製作費とのバランスを考え，分割要素をある範囲でまとめて，その区間を等断面とし，桁の総コストを最小に

する。――Smoothed Design。

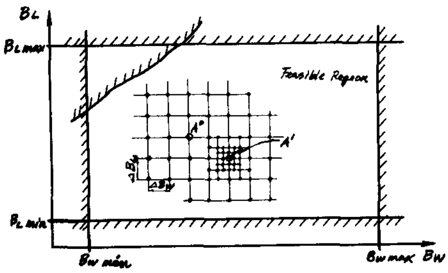
1) Minimum Material Cost Design　まず，桁全長をN個の要素に分割して，それぞれの分割要素の長さを$e_k\ (k=1,2,\cdots N)$とし，この分割要素について断面を決定するわけであるが，B_W, B_Lが決まれば，ウェブ，上・下フランジの必要板厚$t_{W,k}$, $t_{U,k}$, $t_{L,k}$は

$$t_{W,k}=Max\{t_{W,min},\ B_W/\alpha,\ t_{\tau k}\},\quad t_{U,k}(or\ t_{L,k})=Max\{t_{U,min}(or\ t_{L,min}),\ B_U(or\ B_L)-t_{W,k}/\beta,\ t_{\sigma k}\}\qquad (2)$$

ここに α：ウェブ高と厚さとの間の制限，$t_{\tau k}$：せん断応力より決定されるウェブ必要板厚

β：フランジ突出巾に対する制限，$t_{\sigma k}$：曲げ応力より決定されるフランジ必要板厚

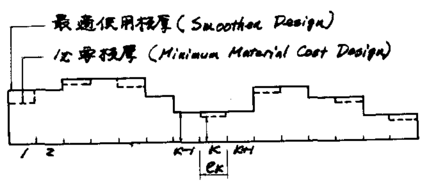
より求めることができるので，B_W, B_Lについて最適化を考えればよい。それにはGrid Searchが適用できる。図－2に示すようなB_W, B_Lの2次元平面を考え，その平面上の初期値A^0のまわりに，予め決められた間隔ΔB_W, ΔB_L（B_W, B_Lの増減量）を持つ24個の格子点をとり，A^0を含めた25個の格子点で桁を設計し，鋼材費が最小になる格子点A^1をみつける。次にA^1のまわりにまた24個の格子点をとって同様の計算を行ない最小点A^2をみつける。これを順次繰返して，最小値を示す格子点が前回のものと一致すれば，ΔB_W, ΔB_Lを1/2にして前と同じ手順を繰返し，ΔB_W, ΔB_Lが定められた最小の増減量に等しくなれば，その時の中心点の座標B_W, B_Lが最適解である。このようにして，minimum material CostとなるようなB_W, B_U, B_L, $t_{W,k}$, $t_{U,k}$, $t_{L,k}$が求められる。



図－2　Grid Search

2) Smoothed Design　いま，1)で各分割要素に対して図－3に示すように必要板厚t_kが求まり，製作費を考慮に入れて，最終的にT_kという板厚を使用するものとする。この時，t_kとT_kとの間には次の関係がある。

$$T_k \geq t_k \qquad (3)$$



図－3　必要板厚と最適使用板厚

この場合，(T_k-t_k)の分だけ鋼材損失コストϕ_kが発生し，一方，断面変化位置においては$(T_k\neq T_{k-1})$突合せ溶接コストψ_kが発生する。ϕ_kおよびψ_kはそれぞれ

$$\phi_K(T_K,t_K)=\rho\cdot B[T_K\cdot C_M(B,T_K)-t_K\cdot C_M(B,t_K)]e_K \qquad (4)$$

$$\psi_K(T_K,T_{K-1})=C_S(B,\ Min\{T_K,T_{K-1}\}) \qquad (5)$$

と表わすことができ，全損失コストは両者の合計で次式のようになる。

$$C(T_1,T_2,\cdots\cdots,T_N)=\sum_{K=1}^{N}[\phi_K(T_K,t_K)+\psi_K(T_K,T_{K-1})]\qquad ただし\ T_0=T_1 \qquad (6)$$

目的は，制約条件(3)のもとで，ϕ_kとψ_kとをバランスさせながら式(6)を最小にするように，中道を歩む最適使用板厚T_kを求めることに帰着するが，これは平滑過程[3]と呼ばれるところのものであり，DPが適用できる。このために問題の場を広げて，$T_K\geq t_K$のもとで

$$C_R=\sum_{K=R}^{K=N}[\phi_K(T_K,t_K)+\psi_K(T_K,T_{K-1})],\quad K=R,R+1,\cdots\cdots,N,\quad R=1,2,\cdots\cdots,N \qquad (7)$$

を最小にするという問題，すなわち，$R=1\sim N$の個々の段階で最小値を求めるというN段決定過程の問題として取扱う。要素$(R-1)$における使用板厚をτとし，次の$f_R(\tau)$という関数を導入する。

$$f_R(\tau)=Min[C_R],\quad T_K\geq t_K,\quad \tau\geq t_{K-1},\quad K=R,R+1,\cdots\cdots,N,\quad R=1,2,\cdots\cdots,N \qquad (8)$$

この $f_R(\tau)$ は要素(R−1)の板厚がτのときの、要素R〜N間における最小損失コストを表わしている。ここでBellmanの最適性の原理を適用して、$f_R(\tau)$と$f_{R+1}(\tau)$とを結ぶ繰返しの関数方程式(9)が得られ、これを順次解くことにより最適な使用板厚T_Rを求めることができる。

$$f_R(\tau)=Min[\phi_R(T_R,t_R)+\psi_R(T_R,\tau)+f_{R+1}(T_R)],\quad T_R\geq t_R,\quad \tau\geq t_{R-1},\quad R=1,2,\cdots,N \qquad (9)$$

初期条件として $f_{N+1}(\tau)=0$, $t_0=t_1$ (10)

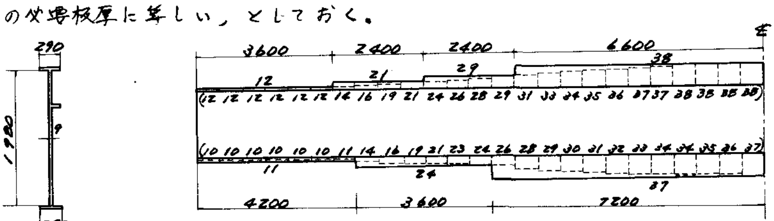
式(9)を解くアルゴリズムについて簡単に述べると、計算は桁の右端から出発し、$f_{N+1}(\tau)$を用いて$f_N(\tau)$を、$f_N(\tau)$を用いて$f_{N-1}(\tau)$を、……というふうに$f_1(\tau)$が得られるまで続ける。それと同時に各段階において、τのとり得るすべての値に関して、最適使用板厚T_Rを行列[X]の(R,τ)の要素に記憶しておく。$f_1(\tau)$のうち最小値を示す$f_1(\tau^*)$が桁全体を考えた場合の最小損失コストであり、τ^*が要素1における最適使用板厚T_1となる。要素2〜Nについては、[X]の中から見つけられ、$T_R=X_{R,T_{R-1}}$となる。

なお、式(9)の計算を行なう際、計算の効率向上のため、T_R, τは、①必要板厚の中の最大のもの以下、②桁のある分割要素の必要板厚に等しい、としておく。

4. 数値計算例

スパン30mの単純非合成桁と、単純活荷重合成桁の数値計算例を図−4,5に示す。鋼材はSM50である。なおコスト関数は

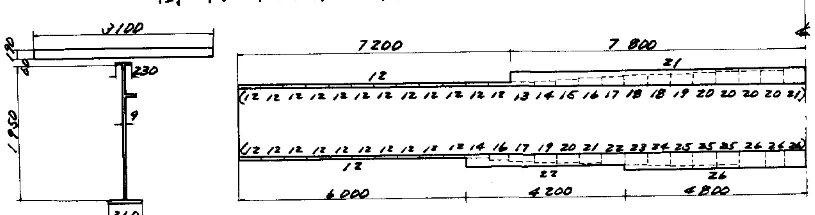
$$C_M=\begin{cases}65000\ \text{円/ton} & 3.5<t\leq3.8\\ 64000\ \text{〃} & 3.0<t\leq3.5\\ 63000\ \text{〃} & 2.5<t\leq3.0\\ 59000\ \text{〃} & 2.2<t\leq2.5\\ 56000\ \text{〃} & 1.1<t\leq2.2\\ 58000\ \text{〃} & 0.9\leq t\leq1.1\end{cases}$$



$w_d=2.522$ t/m, $w_L=0.756$ t/m, $P=10.80$ t, $i=0.250$

総重量:7.898t, 総コスト:501.8千円 分割数:50 水平スチフナー:1本

図−4. 単純非合成桁



$w_{d1}=1.980$ t/m, $w_{d2}=0.542$ t/m, $w_L=0.756$ t/m, $P=10.806$ t, $i=0.250$

総重量:6.671t, 総コスト:401.8千円, 分割数:50 水平スチフナー:1本, ウェブ高:50cm刻

図−5、単純活荷重合成桁

$C_S=2000+7\times(0.31t^2+0.63t+0.46)\times B$ 円/10m t:cm, B:cm

5. あとがき

コスト関数に若干問題があるが、これさえ正確に把握できれば、最小重量設計から一歩前進した、桁の合理的な最小コスト設計が可能である。桁の総コストに対しては、ウェブ高の影響が大きく、ウェブは、板厚はできるだけ薄く、その板厚のとり得る最高の桁高が最も有利な設計となる。なお、講演会当日、時間があれば他の計算例についても説明したい。

参考文献

1). Reza Razani, George G. Goble: "Optimum Design of Constant-Depth Plate Girders" Proc. of ASCE, ST2, April, 1966

2). George G. Goble, Philip V. DeSantis: "Optimum Design of Mixed Steel Composite Girders" Proc. of ASCE, ST6. Dec. 1966

3). Richard E. Bellman, Stuart E. Dreyfus: "Applied Dynamic Programming" Princeton University Press, 1962