I-64 SUMT法による鋼構造物の最適設計について

京都大学工学部土木工学科 正会員 山田善一
新日本技術コンサルタント 正会員 ○岡田鉄三

1. 緒言

工学における設計という作業は、作られる対象物が、その使用目的に対して合理的かつ最適となるべく実行されなければならない。土木工学では、構造力学、水理学、土質力学など、いわゆる工学基礎科学が、その対象物の設計過程にとり入れられ、外力に対する応力、変形や、必要寸法が、決定されて来たが、実際に設計された構造物や施設が、果して最も適した寸法に作られているか否かなどについての設計結果の判断や、最適設計結果に到達する手法に関しては、多分に経験的な勘に頼っている場合が多い。このような工学における最も重要な作業である設計、特に構造物の設計において設計理論の根拠を与えるのが、構造総合(Structural Synthesis)の考え方であるといえよう。すなわち与えられた制約条件のもとで設計対象の効果を最大にするには、どのような数学モデルのもとで問題を処理すればよいかを設計の一貫したシステムの中でとらえてゆこうとするもので、特に米国を中心としてここ数年、構造工学の主要な研究テーマとして取りあげられている。この研究も Structural Synthesis に属するもので、著者らは、弾性設計による骨組構造物の最小重量設計法についての一つの計算法を以下に提案する。なおこれに類する最小重量設計法についていくつかの論文が、ASCE, AIAA などに発表されているが、汎用性に欠ける面もあり、実用化の点でまだ検討の余地が、多く残されているようである。著者らは、これらの研究を踏えつつ、より汎用性、実用性に富む設計法の開発ということに重点をおいた。

2. 設計法の原理

まず設計変数を $X(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ とし、目的関数は、次式で表わす。

$$F = F(X) \quad \text{-----------} (2.1)$$

この式は、一般に数式で表わされる。一方設計変数 X に対する構造物の応答は、

$$B = B_i(X) \quad \text{-----------} (2.2) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

とする。一般にこの B_i は X の値が与えられると電子計算機による数値解析によって決定される。次に制約条件式は、応答 B_i 及び変数 X を含む関数を用いて次のように表わす。

$$f_p(B_i, X) \leq a_p \text{----} (2.3) \quad (P = 1, \cdots\cdots, l, \quad i = 1, \cdots\cdots r, \quad r \leq m)$$

たとえば Von-Mises, Tresca 等の降伏条件式が この式に相当する。ところで、いま 初期仮定値 X^0 を与え その時の F, B_i の 値を $F^0 = F(X^0)$, $B_i^0 = B_i(X^0)$ とおく。そして初期仮定値 X^0 から ΔX だけ修正することを考える。

$$X = X^0 + \Delta X \quad \text{-----------} (2.4)$$

この X に対する F, B_i は、次式で表せる。

$$F = F(X^0 + \Delta X) = F^0 + \Delta F \text{-----} (2.5)$$

$$B_i = B_i(X^0 + \Delta X) = B_i^0 + \Delta B_i \text{-----} (2.6)$$

又、制約条件式f_pも、次のようになる。

$$f_p(B_i, X) = f_p(B_i^0 + \Delta B_i, X^0 + \Delta X) \leq a_p \quad \text{------} (2.7)$$

ところでこの3式は、X^0が、あらかじめ与えられるとすると、未知の修正値ΔXの関数と考えられる。したがって最適な修正値ΔX_{opt}を決定するためには、ΔXを変数とする制約条件式(2.8)のもとで目的関数(2.5)式を最小にするΔXの値を決定すればよい。このようにX^0の近傍での最適修正値が決定されれば、次の段階で$(X^0 + \Delta X_{opt})$を初期仮定値X^0として同じ計算を行なう。以下同様の操作を、目的関数Fの値が収束するまで繰返せば、最適設計に到達する。

3. Non-Linear Programming (SUMT)[1]

設計問題が、以上のように条件付き最小値問題という数学モデルに変換されると次は、いかにしてこの最適修正値ΔX_{sol}を決定するかということになるが、一般に(2.7)式は、ΔXに対して非線型になるので、この問題は、Non-Linear Programming として取り扱わなければならない。ここでは、Non-Linear Programming として、制約条件(2.7)式で作られる Feasible Region が凹形状であっても適用できるSUMT法を用いる。以下、簡単にこのSUMTについて説明する。

いま、制約条件 $f_i(X) \geq 0 \quad (i = 1, \cdots m)$ のもとで目的関数$F(X)$を最小にする問題を考える場合、まず、次のような Un-Constrained Minimization Problem に変換する。

$$P(X, r_k) = F(X) + r_k \sum_{i=1}^{m} \frac{S_i}{f_i(X)} \quad \text{-------} (3.1)$$

r_kは、パラメーター、S_iは、$f_i(X)$の影響係数、右辺第2項は Penalty Function である。最初$k=1$に対してr_1, S_iの値および、Xの初期値を与え、$W^0 = \{X / f_i(X) > 0\}$内で$P(X, r_k)$を最小にするX_1を Un-Constrained Minimization Technique[2] (Steepest Decent Method, Conjugate Gradient Method, Variable Metric Method, Direct Search Method等)により決定する。次に$k=2$に対するr_2を$r_1 > r_2 > 0$となるように与えてX_1を初期値として、$k=1$の時と同じようにしてPを最小にするX_2を決定する。以下同じ操作を繰返して

$$\lim_{k \to \infty} r_k = 0 \quad \text{----------} (3.2)$$

とするとき

$$\min_{r_k \to 0} P(X, r_k) \doteqdot \operatorname{Min} F(X) \quad \text{-------------} (3.3)$$

となる。以上のように制約条件付き最小値問題を Un-Constrained Minimization Technique を繰返し用いる問題に変換することにより最適解が得られる。なおr_1は 10～1000, r_{k+1}/r_kは 0.1～0.01 にとれば、収束がよい。

4. 最適設計計算に用いる計算方法

応答B_j(この場合、タワミ、応力)を決定する応答解析(構造解析)には、Stiffness Matrix Method を用いる。又 Un-constrained Minimization Technique には、Direct Search Method[2]を用いる。

次に、ΔXに対するB_iの増分ΔB_iの計算方法について述べる。まず、ΔXが微小量と考えると、X_0のまわりにTaylor展開した時、2次項以下を無視することができ、次の近似式が成立する。

$$\Delta B_i = \left[\frac{\partial B_i}{\partial X}\right]_{X=X_0} \cdot \Delta X = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial X_j} \Delta X_j \quad \text{------} (4.1)$$

ここで問題となるのが $\partial B_i/\partial x_j$ の計算方法であるが、以下のように考えれば機械的に簡単に求まる。まず応答 B_i については、この場合応力(変形)をあらわすものとする。よって説明の都合上 B_i を部材端作用力[3] $\{A_M\}_i$ を用いてあらわすことにする。さて、Stiffness Matrix Method の基本式[3]を書くと次のようになる。ただし $\mathbb{A}_D$ は外力、$\mathbb{S}$ は Stiffness Matrix、$\mathbb{D}$ は節点変位、$\{A_{ML}\}_i$ は i 部材の外力ベクトル、$[S_M]_i$ は i 部材の部材 Stiffness Matrix をあらわす。

$$\mathbb{A}_D=\mathbb{S}\cdot\mathbb{D} \qquad \text{------} (4.2)$$

$$\mathbb{D}=\mathbb{S}^{-1}\cdot\mathbb{A}_D \qquad \text{------} (4.3)$$

$$\{A_M\}_i=\{A_{ML}\}_i+[S_M]_i\{\mathbb{D}\}_i \qquad \text{------} (4.4)$$

いま、(4.3)式を x_j で微分すると

$$\partial\{\mathbb{D}\}/\partial x_j=(\partial\mathbb{S}^{-1}/\partial x_j)\cdot\mathbb{A}_D \qquad \text{-------} (4.5)$$

$\mathbb{S}=\mathbb{S}_0+\Delta\mathbb{S}$ なる式を考える。ただし $\Delta\mathbb{S}$ は、ある部材について微小な量だけ剛性を変化させたときの剛性マトリックス $\mathbb{S}$ の変化量をあらわす。すると次のことがいえる。

$$\mathbb{S}=\mathbb{S}_0+\Delta\mathbb{S}=\mathbb{S}_0(\mathbb{I}+\mathbb{S}_0^{-1}\cdot\Delta\mathbb{S}) \qquad \text{-------} (4.6)$$

$$\mathbb{S}^{-1}=(\mathbb{I}+\mathbb{S}_0^{-1}\cdot\Delta\mathbb{S})^{-1}\cdot\mathbb{S}_0^{-1}\fallingdotseq(\mathbb{I}-\mathbb{S}_0^{-1}\cdot\Delta\mathbb{S})\cdot\mathbb{S}_0^{-1} \text{---} (4.7)$$

$$\therefore \Delta\mathbb{S}^{-1}\fallingdotseq-\mathbb{S}_0^{-1}\cdot\Delta\mathbb{S}\cdot\mathbb{S}_0^{-1} \qquad \text{-------} (4.8)$$

$$\partial\mathbb{S}^{-1}/\partial x_j\fallingdotseq-\mathbb{S}_0^{-1}\cdot\frac{\partial\mathbb{S}}{\partial x_j}\cdot\mathbb{S}_0^{-1} \qquad \text{-------} (4.9)$$

(4.5),(4.9)式より

$$\partial\{\mathbb{D}\}/\partial x_j\fallingdotseq-\mathbb{S}_0^{-1}\cdot\frac{\partial\mathbb{S}}{\partial x_j}\cdot\{\mathbb{D}\} \qquad \text{--------} (4.10)$$

したがって(4.4),(4.10)式より

$$\partial\{A_M\}_i/\partial x_j=\{\partial[S_M]_i/\partial x_j\}\cdot\{\mathbb{D}\}_i-[S_M]_i\left[\mathbb{S}_0^{-1}\cdot\frac{\partial\mathbb{S}}{\partial x_j}\cdot\{\mathbb{D}\}\right]_i \text{---} (4.11)$$

よって変数 $\mathbb{X}$ を $\mathbb{X}^0$ から $\Delta\mathbb{X}$ だけ変化させた時の $\{A_M\}_i$ の変化量 $\Delta\{A_M\}_i$ は、次のようになる。

$$\Delta\{A_M\}_i\fallingdotseq\sum_{j=1}^{n}\left[\partial\{A_M\}_i/\partial x_j\right]\cdot\Delta x_j\fallingdotseq\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial[S_M]}{\partial x_j}\{\mathbb{D}\}_i-[S_M]_i\left\{\mathbb{S}_0^{-1}\frac{\partial\mathbb{S}}{\partial x_j}\{\mathbb{D}\}\right\}_i\right]\Delta x_j \text{---} (4.12)$$

ところで $\partial[S_M]_i/\partial x_j$, $\partial\mathbb{S}_0/\partial x_j$ は、X のとり方にもよるが、一般には Δx_j に対して一定値となるので(4.12)式は、Δx_j について線型となる。このことから $\Delta x_j=x_j^0$ としたときの $\{A_M\}_i$ の変化量を $\Delta\{A_M\}_{ij}$ とした時、$\partial\{A_M\}_i/\partial x_j$ は、$\Delta\{A_M\}_{ij}/x_j^0$ に等しいと考えてさしつかえない。よって、変数 $\mathbb{X}$ が $\Delta\mathbb{X}$ だけ変化した時の $\{A_M\}_i$ の変化量 $\Delta\{A_M\}_i$ は次式より求まる。

$$\Delta\{A_M\}_i=\sum_{j=1}^{n}\Delta\{A_M\}_{ij}\frac{\Delta x_j}{x_j^0} \qquad \text{----------} (4.12)$$

なお $\Delta\{A_M\}_{ij}$ は、次のように計算する。

$$\Delta\{A_M\}_{ij}\fallingdotseq[S_M]\Delta\{\mathbb{D}\}_{ij}+\Delta[S_M]_{ij}\{\mathbb{D}\}_i \text{-----} (4.13)$$

ただし $\Delta\{\mathbb{D}\}_{ij}=-[\mathbb{S}_0^{-1}\cdot\Delta\mathbb{S}_j\cdot\mathbb{D}]_i$ すなわち x_j を2倍した時の $\{\mathbb{D}\}_i$ の変化量、又、$\Delta\mathbb{S}_j$ は、$\mathbb{S}_0$ の要素のうち x_j に関する部分のみ残し他の要素はすべて0とおいたもの。$\Delta[S_M]_{ij}$ は、$i=j$ のときは $[S_M]_i$ に等しく $i\neq j$ の時は0とする。

その他計算上のテクニックとしては、設計変数のスケーリングを行なえば、収束が早い。すなわち

$$\mathbb{X}=\mathbb{X}^0+\Delta\mathbb{X}=\mathbb{X}^0(1+\Delta\mathbb{X}/\mathbb{X}^0)=\mathbb{U}\cdot\mathbb{X}^0 \text{-----} (4.14)$$

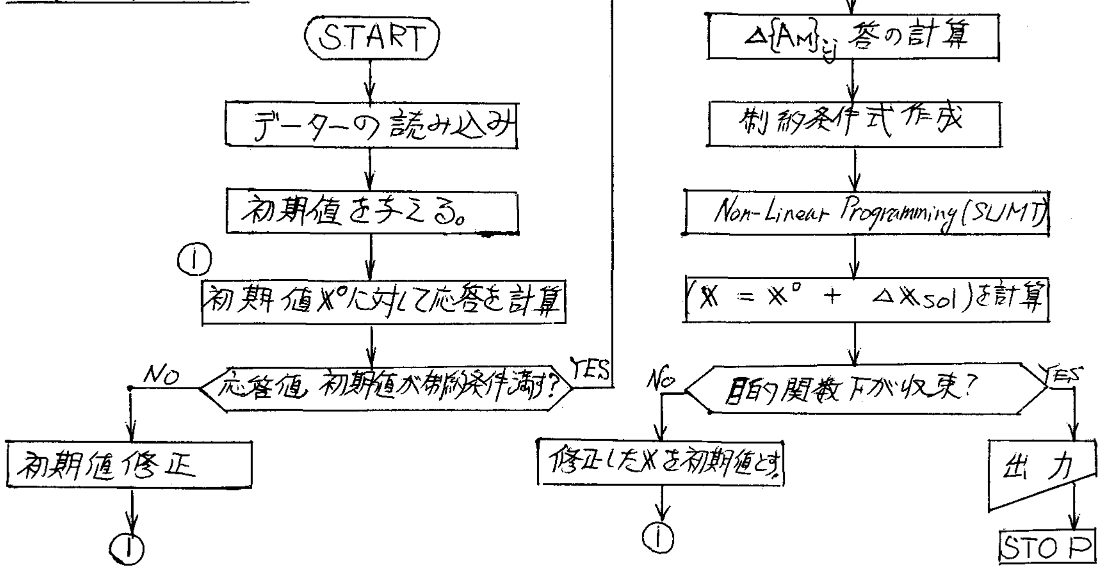
として

$$\mathbb{U}=1+\Delta\mathbb{X}/\mathbb{X}^0 \qquad \text{--------} (4.15)$$

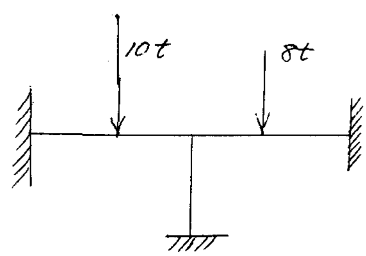
なる変換をして計算をすすめればよい。又、スケーリングした変数 $\mathbb{U}$ は次の制限をもうけると収束が早くなる。

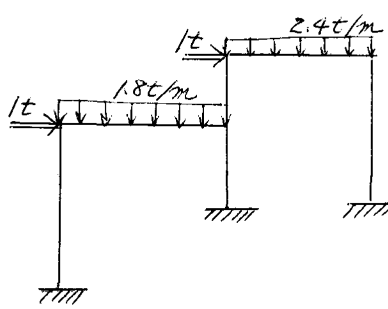
$$0.7\sim0.8\leq\mathbb{U}\leq1.1\sim1.2 \qquad \text{--------} (4.16)$$

5. フローチャート



6. 計算例





著者らは，FORTRAN IV によりこのフローチャートのようなプログラムを作成し右に示すような任意形平面骨組構造物の設計計算に適用してみた。目的関数に重量をとり最小重量設計とし，制約条件には，許容応力をとった。設計変数としては，断面にBuilt-upのI Sectionを用い，そのフランジ断面積（上，下 別々の変数とする）を変数とした。計算は，京大大型計算機センター FACOM 230-60 を用いた。計算結果については，講演時にくわしく述べるが，最小重量設計が必ずしもFully-Stressed Designにならなかったということが，注目すべき結果である。

7. 参考文献

(1) J. Kowalik "Non-Linear Programming Procedure and Design Optimization" Mathematics & Computing Machinery Series Nr.13 1966

(2) J. Kowalik "Method for Unconstrained Optimization Problems" Published by American Elsevier Published Co.

(3) W. Weaver "Computer Programs for Structural Analysis" Published by D. Van Nostrand Co.