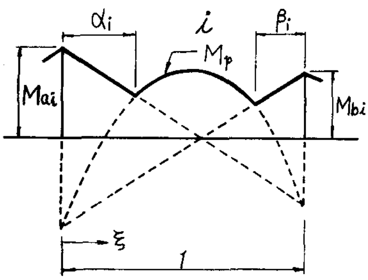
I-61　移動荷重をうける連続ばりの最小重量設計

信州大学　正会員　○　草間孝志
信州大学　正会員　　吉田俊弥

1．まえがき　　単一移動荷重をうける部材に対する最適塑性抵抗曲げモーメントを，最小重量設計の立場にたつて決定する問題は，両端固定ばりについては，M．R．Horne によつて研究されている[1]。筆者等は Horne の研究を連続ばりへ拡張することを考え，一例として，3スパン連続ばりについて計算を行ない，その結果を昨年報告した[2]。本文は，さらに一般的に rスパン連続ばりに対する基本式の誘導と，2，3の数値計算結果を示したものである。なお，等分布荷重と単一移動荷重をうける場合，連行荷重をうける場合などについても，一部計算を行なったが，ここでは，単一移動荷重のみをうける場合について報告する。

2．全塑性モーメントと重量関数　　いま，rスパン連続ばりより取りだした i番目のスパンについて考えると，この部材の全塑性モーメント M_p は既報［2］により（一部記号を変えてある），



図－1

$$M_{ai}=2\gamma_i\alpha_i\overline{M}\ ,\qquad M_{bi}=2\gamma_i\beta_i\overline{M} \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\xi\leq\alpha_i & M_p=2\gamma_i[\alpha_i-(\alpha_i+\beta_i)\xi]\overline{M}\\ \alpha_i\leq\xi\leq 1-\beta_i & M_p=2\gamma_i[-\alpha_i+(2+\alpha_i-\beta_i)\xi-2\xi^2]\overline{M}\\ 1-\beta_i\leq\xi\leq 1 & M_p=2\gamma_i[-\alpha_i+(\alpha_i+\beta_i)\xi]\overline{M}\end{array}\right\} \tag{2}$$

ここに，$\gamma_i=l_i/L$，$l_i=i$番目のスパンのスパン長，$L=\sum_{i=1}^{r}l_i$，$\overline{M}=PL/4$ である。いま単位長さ当りの重量 w を $w=kM_p^n$ とおくと，rスパン全体の重量 W は，つぎのようになる。

$$W=kL\sum_{i=1}^{r}\left(\gamma_i\int_0^1 M_p^n d\xi\right)=k2^n\overline{M}^nL\sum_{i=1}^{r}\varphi_i(\alpha_i,\beta_i)=k2^n\overline{M}^nL\cdot W_f$$

ここに，
$$\varphi_i(\alpha_i,\beta_i)=\gamma_i^{n+1}\left[\frac{1}{n+1}\frac{1}{\alpha_i+\beta_i}\left\{1-(1-\alpha_i-\beta_i)^{n+1}\right\}\left\{\alpha_i^{n+1}+\beta_i^{n+1}\right\}+\int_{\alpha_i}^{1-\beta_i}\left\{-\alpha_i+(2+\alpha_i-\beta_i)\xi-2\xi^2\right\}^n d\xi\right] \tag{3}$$

上式の　$W_f=\sum_{i=1}^{r}\varphi_i(\alpha_i,\beta_i)$ をここでは重量関数とよぶことにする。

3．支点における条件

$$\left.\begin{array}{lll}\text{a）左端が単純支持の場合} & \text{第1スパンの左端が単純支持とすると} & M_{a1}=0,\ \therefore\alpha_1=0\\ \text{b）右端が単純支持の場合} & \text{第}r\text{スパンの右端が単純支持とすると} & M_{br}=0,\ \therefore\beta_r=0\end{array}\right\} \tag{4}$$

c）中間支点での条件　　いま第 $i-1$スパンと第 iスパンの共通支点について考えると，

$$M_{b(i-1)}=M_{ai}\quad\text{より}\quad \beta_{i-1}=\frac{\gamma_i}{\gamma_{i-1}}\alpha_i\quad\text{または}\quad\alpha_i=\frac{\gamma_{i-1}}{\gamma_i}\beta_{i-1} \tag{5}$$

となり，α_i を β_{i-1}（または β_{i-1} を α_i）で表わすことができる。

4．最小重量設計による α_i, β_i の決定　　支点における条件を満足するように α_i, β_i を与えるとそのときの M_p の値と全重量 W は式（2），（3）より求められるが，経済性の一要素として考えられる全重量を最小にするように α_i, β_i を決定することを考えよう。式（5）を用いると，W_f は一般に $\alpha_1,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_i,\cdots\beta_r$（または $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i,\cdots\alpha_r,\beta_r$）の $r+1$個の未知量を含んでいる。したがつて，$\partial W_f/\partial\alpha_1=0$，$\partial W_f/\partial\beta_1=0$，$\cdots$，$\partial W_f/\partial\beta_i=0$，$\cdots\partial W_f/\partial\beta_r=0$ より次式を得る。

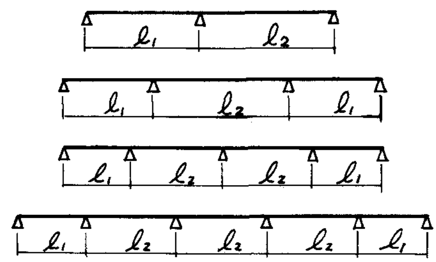
$$
\left.\begin{aligned}
&\psi(\alpha_1,\beta_1)=0\\
&\psi(\beta_1,\alpha_1)+\psi(\alpha_2,\beta_2)=0\\
&\text{-----------------}\\
&\psi(\beta_i,\alpha_i)+\psi(\alpha_{i+1},\beta_{i+1})=0\\
&\text{-----------------}\\
&\psi(\beta_{r-1},\alpha_{r-1})+\psi(\alpha_r,\beta_r)=0\\
&\psi(\beta_r,\alpha_r)=0
\end{aligned}\right\}\quad(6)
$$

ここに,

$$
\begin{aligned}
\psi(u_i,v_i)=\gamma_i^{\,n}\Big[&\frac{1}{u_i+v_i}\Big[(1-u_i-v_i)^n(u_i^{\,n+1}+v_i^{\,n+1})\\
&+u_i^{\,n}\{1-(1-u_i-v_i)^n\}\Big]\\
&-\frac{1}{n+1}\frac{1}{(u_i+v_i)^2}\{1-(1-u_i-v_i)^{n+1}\}(u_i^{\,n+1}+v_i^{\,n+1})\\
&-n\int_{u_i}^{1-v_i}\{-u_i+(2+u_i-v_i)\xi-2\xi^2\}^{n-1}(1-\xi)d\xi\Big].
\end{aligned}
$$

すなわち,式(5),(6)を満足するような α_i, β_i を求めれば全重量Wは最小となる。もし,左端が単純支持であれば,$\alpha_1=0$ で,式(6)の第1式は不要となり,もし,右端が単純支持であれば $\beta_r=0$ で,式(6)の最後の式は不要となる。n の値は一般に $n=0.6$ または,$n=2/3$ 程度と云われているが,特別な場合として,$n=1.0$ とすると,式(6)は次のようになる。

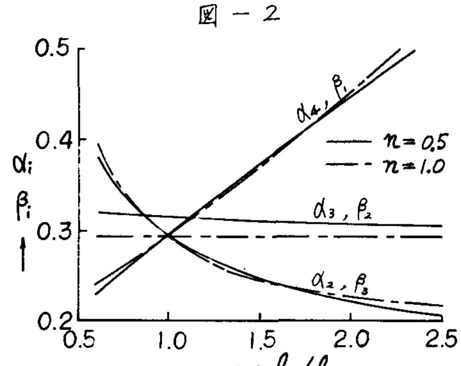
$$
\left.\begin{aligned}
&\alpha_1=(2-\sqrt{2})/2=0.2929,\\
&\beta_i=\frac{1}{2\left(1+\frac{\gamma_i}{\gamma_{i+1}}\right)}\left[4-\sqrt{2\left(6-\frac{\gamma_i}{\gamma_{i+1}}-\frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i}\right)}\right]\\
&\qquad\qquad(i=1,2,\cdots,r-1)\\
&\beta_r=(2-\sqrt{2})/2=0.2929
\end{aligned}\right\}\quad(7)
$$



図－2

したがって,式(6)を解くにあたっては,第1近似値として,式(7)の値を用いて計算すればよい。計算には,Newton の方法を多変数に応用して計算した。

5. 計算結果　上述の式をもとに,rスパン連続ばりに対する電算プログラムを作り数値計算を行なった。1スパンの両端固定ばりに対する解は,当然のことながら,Horne の解に一致した。両端が単純支持の連続ばりについては,2スパンから5スパンまで計算した。この場合のスパン長の比はAnger の表[3]を参照して,図－2の $\ell_1:\ell_2$ を $1:0.5\sim1:2.5$ まで変化させた。計算結果の一例を図－3に示した。このようにして,与えられた連続ばりに対し,重量を最小にするような M_p を求めることができるが,これらのうちで,さらに重量を最小にするようなスパン長の比($\ell_1:\ell_2$)を求めて表－1を得た。いずれの場合も,ほぼその比が同じであることは興味深い。



図－3　4スパン連続ばりの α_i, β_i の値

表－1　経済的なスパン長の比($\ell_1:\ell_2$)

用いた理論＼スパンの数		2スパン	3スパン	4スパン	5スパン
変断面塑性	$n=0.5$	1:1	1:1.18	1:1.22	1:1.23
	$n=1.0$	1:1	1:1.24	1:1.27	1:1.28
等断面弾性		1:1	1:1.24	1:1.23	1:1.22

参考文献　1) Horne, M.R., Determination of the Shape of Fixed-ended Beams for Maximum Economy According to the plastic Theory. Preliminary Publication and Final Report, International Association for Bridge and Structural Engineering, 4th Congress, Cambridge and London. (1953).

2) 草間,吉田,　移動荷重をうけるはりの最小重量設計,土木学会第24回年次講演会集第1部 p.175 昭44.

3) Anger, Zehnteilige Einflußlinien für durchlaufende Träger. Band III, 1959.