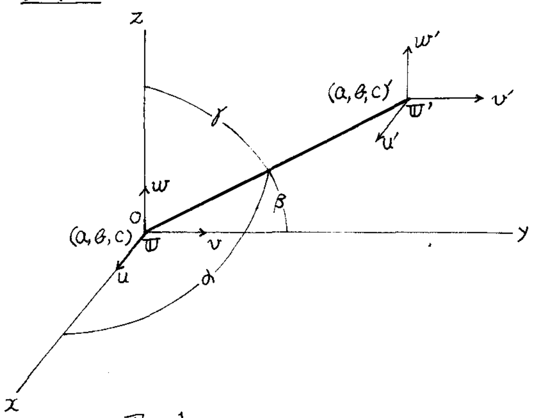
I-46　漸化変形法によるドームトラスの解析

信州大学　学生員　○納場興司　正員　谷本勉之助
正員　夏目正太郎　正員　浜野吉幹

1．まえがき

球形ドームの曲面は一見明快な分割が可能のようでありながら，線材として再構成することには，かなりの問題点が有る。そこでまず，半球を垂直にスライスして，その曲面に部材をワーレントラスのように組み立てた構造物（図－4）の解析から始まり，それをユニットとして考えたドームトラス（図－4）の解析から試みた。そして最終的には均一な部材によって球面ドームをおおう方法を徹底的に追求したBuckminster Fullerのgeodesic domeの解析へと迫りたい。しかるのち，できれば，座屈の問題，巨大なドームにおける大変形の問題に手をつけたい。

2．基本式（任意立体トラスに関する）



図－1

図－1のように物理量をとれば，部材伸びΔLは材端変位$\mathbb{U}$，$\mathbb{U}'$によって，

$$\Delta L = \lfloor \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rfloor \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}' - \lfloor \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rfloor \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \text{--(1)}$$

簡単にして

$$\Delta L = \lfloor \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rfloor (\mathbb{U}' - \mathbb{U}) \quad \text{--(2)}$$

と与えられる。

フックの法則より力と変位の関係は

$$F = \frac{EA}{L}\Delta L = \frac{EA}{L}\lfloor \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rfloor (\mathbb{U}' - \mathbb{U}) \quad \text{--(4)}$$

と表わされる。

3．節点における力釣合い式

$$\sum_{i=1}^{k} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} F_i + \mathbb{P} = 0 \quad \text{--(5)}$$

ここに$\mathbb{P}$は節点における外力として，

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad \text{--(6)}$$

Eq.(4)とEq(5)より

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} \lfloor \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rfloor (\mathbb{U}' - \mathbb{U})_i + \mathbb{P} = 0 \quad \text{--(7)}$$

いま

$$\boldsymbol{a}_i = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} \lfloor \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rfloor_i \quad \text{--(8)}$$

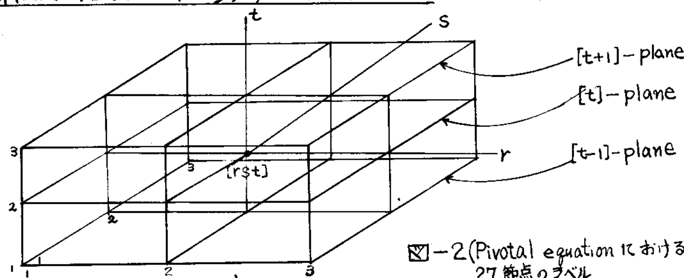
とおけば最終式として

$$\left[\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i\right]\mathbb{U} - \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i \mathbb{U}_i' = \mathbb{P} \quad \text{--(9)}$$

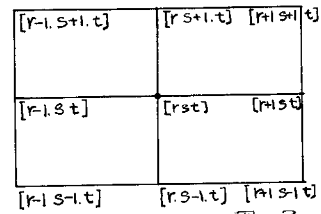
となる。

ただし$\boldsymbol{a}_i$は3-by-3の正方マトリクスである。

4. 構面が平面の立体トラス，の力釣合い式（Pivotal Equation）



図－2（Pivotal equation における 27 節点のラベル）



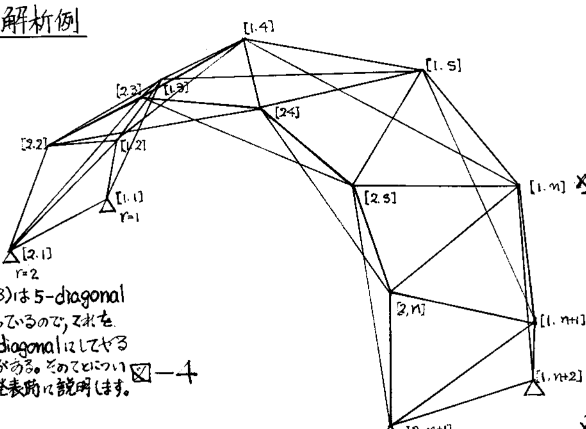
[t]- plane　図－3

[r s t]節点における力釣合式は Eq. (9) より

$$
|\mathbb{a}\,\mathbb{b}\,\mathbb{c}|''\begin{bmatrix}\mathbb{U}_{r-1}\\ \mathbb{U}_{r}\\ \mathbb{U}_{r+1}\end{bmatrix}_{s-1\;t-1}
+|\mathbb{a}\,\mathbb{b}\,\mathbb{c}|\begin{bmatrix}\mathbb{U}_{r-1}\\ \mathbb{U}_{r}\\ \mathbb{U}_{r+1}\end{bmatrix}_{s\;t-1}
+|\mathbb{a}\,\mathbb{b}\,\mathbb{c}|\begin{bmatrix}\mathbb{U}_{r-1}\\ \mathbb{U}_{r}\\ \mathbb{U}_{r+1}\end{bmatrix}_{s+1\;t-1}
+|\mathbb{a}\,\mathbb{b}\,\mathbb{c}|\begin{bmatrix}\mathbb{U}_{r-1}\\ \mathbb{U}_{r}\\ \mathbb{U}_{r+1}\end{bmatrix}_{s-1\;t}
+|\mathbb{a}\,\mathbb{b}\,\mathbb{c}|\begin{bmatrix}\mathbb{U}_{r-1}\\ \mathbb{U}_{r}\\ \mathbb{U}_{r+1}\end{bmatrix}_{s\,t}
+|\mathbb{a}\,\mathbb{b}\,\mathbb{c}|\begin{bmatrix}\mathbb{U}_{r-1}\\ \mathbb{U}_{r}\\ \mathbb{U}_{r+1}\end{bmatrix}_{s+1\;t}
$$

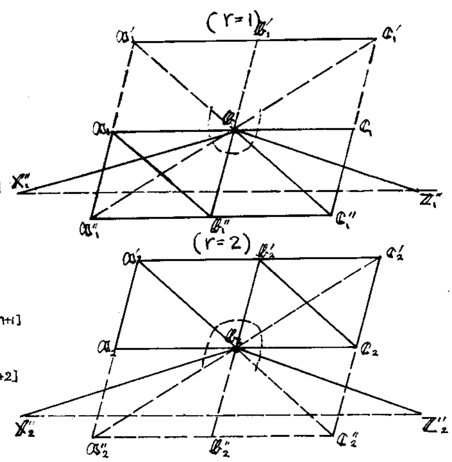
$$
+|\mathbb{a}\,\mathbb{b}\,\mathbb{c}|\begin{bmatrix}\mathbb{U}_{r-1}\\ \mathbb{U}_{r}\\ \mathbb{U}_{r+1}\end{bmatrix}_{s-1\;t+1}
+|\mathbb{a}\,\mathbb{b}\,\mathbb{c}|\begin{bmatrix}\mathbb{U}_{r-1}\\ \mathbb{U}_{r}\\ \mathbb{U}_{r+1}\end{bmatrix}_{s\;t+1}
+|\mathbb{a}\,\mathbb{b}\,\mathbb{c}|\begin{bmatrix}\mathbb{U}_{r-1}\\ \mathbb{U}_{r}\\ \mathbb{U}_{r+1}\end{bmatrix}_{s+1,\,t+1}
=\mathbb{P}_{rst} \qquad ----- (10)
$$

5. 解析例



[注]
Eq(13)は5-diagonal になっているので，それを tri-diagonal にしてやる必要がある。そのことについては発表時に説明します。

図－4



図－5

図-4の立体トラスの解析で，構面が平面的なので 図-5のように ラベルをつけて解いてやった。

[1.5]と[2.5]をまとめた Pivotal equation は

$$
\begin{bmatrix}\mathbb{X}_1'' & 0\\ 0 & \mathbb{X}_2''\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{U}_1\\ \mathbb{U}_2\end{bmatrix}_{s-2}
+\begin{bmatrix}\mathbb{a}_1 & 0\\ \mathbb{a}_2' & \mathbb{a}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{U}_1\\ \mathbb{U}_2\end{bmatrix}_{s-1}
+\begin{bmatrix}\mathbb{b}_1 & \mathbb{b}_1''\\ \mathbb{b}_2' & \mathbb{b}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{U}_1\\ \mathbb{U}_2\end{bmatrix}_{s}
+\begin{bmatrix}\mathbb{c}_1 & \mathbb{c}_1''\\ 0 & \mathbb{c}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{U}_1\\ \mathbb{U}_2\end{bmatrix}_{s+1}
$$

$$
+\begin{bmatrix}\mathbb{Z}_1'' & 0\\ 0 & \mathbb{Z}_2''\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{U}_1\\ \mathbb{U}_2\end{bmatrix}_{s+2}
+\begin{bmatrix}\mathbb{P}_1\\ \mathbb{P}_2\end{bmatrix}=0 \qquad --- (11)
$$

簡単にして，

$$
[\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}]\begin{bmatrix}\{\mathbb{U}\}_{s-2}\\ \{\mathbb{U}\}_{s-1}\\ \{\mathbb{U}\}_{s}\\ \{\mathbb{U}\}_{s+1}\\ \{\mathbb{U}\}_{s+2}\end{bmatrix}+\{\mathbb{P}\}_s=0 \qquad ---(12)
$$

最終的に端部を考慮して Assembling してやると，[注]

$$
\begin{bmatrix}
\mathbb{B}_1\,\mathbb{C}_1\,\mathbb{Z}_1 & & & & & & & & \\
\mathbb{A}_2\,\mathbb{B}_2\,\mathbb{C}_2\,\mathbb{Z}_2 & & & & & & & & \\
\mathbb{X}_3\,\mathbb{A}_3\,\mathbb{B}_3\,\mathbb{C}_3\,\mathbb{Z}_3 & & & & & & & & \\
 & \mathbb{X}_4\,\mathbb{A}_4\,\mathbb{B}_4\,\mathbb{C}_4\,\mathbb{Z}_4 & & & & & & & \\
 & & \mathbb{X}_5\,\mathbb{A}_5\,\mathbb{B}_5\,\mathbb{C}_5\,\mathbb{Z}_5 & & & & & & \\
 & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & \mathbb{X}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}\mathbb{B}_{n-1}\mathbb{C}_{n-1}\mathbb{Z}_{n-1} & & & & \\
 & & & & & \mathbb{X}_n\mathbb{A}_n\mathbb{B}_n\mathbb{C}_n\mathbb{Z}_n & & & \\
 & & & & & & \mathbb{X}_{n+1}\mathbb{A}_{n+1}\mathbb{B}_{n+1}\mathbb{C}_{n+1} & & \\
 & & & & & & & \mathbb{X}_{n+2}\mathbb{A}_{n+2}\mathbb{B}_{n+2} &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\{\mathbb{U}\}_1\\ \{\mathbb{U}\}_2\\ \{\mathbb{U}\}_3\\ \{\mathbb{U}\}_4\\ \{\mathbb{U}\}_5\\ \vdots\\ \{\mathbb{U}\}_{n-1}\\ \{\mathbb{U}\}_n\\ \{\mathbb{U}\}_{n+1}\\ \{\mathbb{U}\}_{n+2}\end{bmatrix}
+\begin{bmatrix}\{\mathbb{P}\}_1\\ \{\mathbb{P}\}_2\\ \{\mathbb{P}\}_3\\ \{\mathbb{P}\}_4\\ \{\mathbb{P}\}_5\\ \\ \{\mathbb{P}\}_{n-1}\\ \{\mathbb{P}\}_n\\ \{\mathbb{P}\}_{n+1}\\ \{\mathbb{P}\}_{n+2}\end{bmatrix}
=0 \quad -(13)
$$