I-43　材料の非線型力学特性を考慮したトラスの有限変位解析

信州大学工学部　正会員　吉澤孝和

トラス構造物の解析において，構造材料の応力-ひずみ特性が非線型性を示すような場合には，外力に対して構造自体が大きく変形するために，微小変位の仮定を用いることは適当でなく，構造自体の形状の変化の影響を同時に考慮した解析が必要となる．

I．非線型応力-ひずみ特性の取り扱い方 *1

微小変位理論による場合，ある荷重条件 $\boldsymbol{L}_i$ に対応するトラスの節点変位が $\boldsymbol{D}_i$ で与えられるものとすると，このときの部材の伸び $\boldsymbol{\Delta}_i$ は

$$\boldsymbol{\Delta}_i = \boldsymbol{P}_0 \boldsymbol{D}_i \tag{1}$$

となる． $\boldsymbol{P}_0$ はトラスの変形前の各節点の座標値からみちびかれる射影マトリクスである． 材料の非線型的な力学特性を要素線分を連続させた折線形状の応力-ひずみ図であらわしたとき，部材の伸び量が式(1)で与えられる場合の部材力マトリクス $\boldsymbol{F}_i$ は

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{S}_i \boldsymbol{P}_0 \boldsymbol{D}_i + \boldsymbol{C}_i \tag{2}$$

となる． $\boldsymbol{S}_i$ は各部材のひずみに対応する上記の折線応力-ひずみ図の要素線分が示す弾性係数により規定される剛性マトリクス，$\boldsymbol{C}_i$ はひずみの値に対応する応力領域に関する補正項で，領域補正マトリクスと呼ぶ． 系の適合条件，平衡条件を処理して，節点変位の解をつぎの形に得る：

$$\boldsymbol{D}_i = \left[\boldsymbol{P}_0^T \boldsymbol{S}_i \boldsymbol{P}_0\right]^{-1}\left[\boldsymbol{L}_i - \boldsymbol{P}_0^T \boldsymbol{C}_i\right] \tag{3}$$

計算は荷重漸増法（増分法）により，各荷重段階ごとに部材の応力度に対応して $\boldsymbol{S}_i$，$\boldsymbol{C}_i$ の値を補正しながら所定の荷重値に至らしむる．

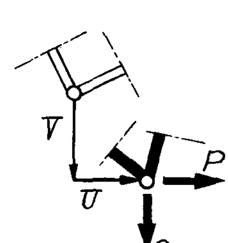
II．構造物の形状変化の影響の取り扱い方

載荷によって構造物は変形し，これによって発生する部材力は構造物の変形後の状態において外力とつり合いを保たなければならない． 有限変位解析の目的は，与えられた荷重条件に対応する構造物の最終的な変形状態を見出すことにある． ここではつぎの3種類の解法について比較する：

[a] 仮定した変位を補正する方法 —— 変位補正法 *2

与えられた荷重 $\boldsymbol{L}$ に対応する構造物の節点変位を反復法により補正して収束させる方法で，変位の初期値には通常，微小変位理論による解を用いる． 反復計算 (η) 回目における部材の伸び $\boldsymbol{\Delta}_\eta$ はつぎのように与えられる：

$$\boldsymbol{\Delta}_\eta = \boldsymbol{P}_0 \boldsymbol{D}_\eta + \boldsymbol{B}_\eta \tag{4}$$



$\boldsymbol{P}_0$ は系の変形前の形状に関して求めた各部材の方向余弦より定められる射影マトリクス，$\boldsymbol{D}_\eta$ は反復 (η) 回目における節点変位マトリクス，$\boldsymbol{B}_\eta$ は系の形状変化の影響を導入する形状補正マトリクスで，その値は1段階前の反復計算で得られた $\boldsymbol{D}_{\eta-1}$ の値により定められる． 系の力のつり合い条件は変形後の形状について処理することになるから，節点

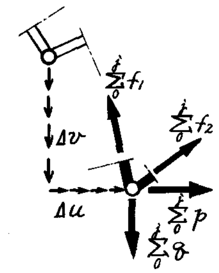
変位 $D_{\eta-1}$ で節点座標を更新して得られる射影マトリクスを P_η とすれば，反復 (η) 回目の解は

$$D_\eta = [P_\eta^T S_o P_o]^{-1}\ [L - P_\eta^T S_o B_\eta] \qquad (5)$$

となる．　S_o は各部材の剛度を対角要素に有する剛性マトリクスで，変形前の諸量で定められる．

[b] 荷重の微小増分に対する変位を累積する方法 —— 増分法 [*3]

構造物の形状寸法に比較してその変形量がきわめて微小となるような荷重条件の場合には，微小変位理論の仮定が十分に正しいと考えうるから，与えられた荷重 L を細分し，構造物に微小荷重 ΔL を作用させ，それによって生ずる節点変位 ΔD_j により系の形状を修正しながら所定の荷重値 L に至らしめ，各段階における節点変位 ΔD_j の累計により最終変位をあらわす．　数値計算においては，荷重 L に対する分割数を増加しながら上記の手順をくりかえし，変位の累計値を収束させて解とみなす．　この方法では，部材の伸びは系の節点座標の変形前と変形後の関係から求められる．　$(j-1)$ 番目の計算段階までに得られた部材の伸びの総量を Δ_j，そのときの系の形状から得られる射影マトリクスを P_j とすれば，(j) 番目の計算段階での節点変位は



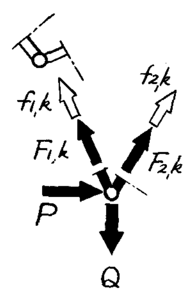
$$\Delta D_j = [P_j^T S_o P_j]^{-1}\ [\textstyle\sum_0^j \Delta L - P_j^T S_o \Delta_j] \qquad (6)$$

の形で得られる．　S_o は前と同様，系の変形前の諸量で定められる剛性マトリクスである．

[c] 力のつり合い条件を補正する方法 —— 平衡法 [*4]

微小変位の解析式を用いて，荷重 L に対応する節点変位 D_k が得られたものとする．　D_k により系の形状を修正し，これより得られる射影マトリクス P_k を用いて，すでに得られている部材力 F_k と荷重 L との間で平衡条件を検討する．これが満足されないときは，部材力は f_k だけの補正力を要する．　この補正力は次式に示されるような，節点の微小変位 d_k により誘起される：

$$d_k = [P_k^T S_o P_k]^{-1}\ [L - P_k^T S_o \Delta_k] \qquad (7)$$



Δ_k, S_o は上記の増分法の場合と同様に定義される．　計算は d_k の値が許容しうる微小量になるまでくりかえし，節点変位は各計算段階で得られる d_k の代数和であらわされる．

Ⅲ. 非線型材料特性の有限変位解析への導入

荷重漸増法により材料の非線型特性を処理する場合には，部材のひずみに対応して弾性係数が変化するため，これに上記の有限変位に関する各式を組み合わせると，式(5),(6),(7)の剛性マトリクス S_o が変数 S_i となり，さらに式(2)の補正項 C_i が付加される．　これに関する各種の式形および計算上の得失はスライド説明による．

参考文献

*1 吉澤：　トラスの非線型問題の数値解析　土木学会論文報告集第180号　1970. 8
*2 長谷川・成岡：　変形を考慮した斜張橋の解析　土木学会論文報告集第169号　1969. 9
*3 G.H. Powell：　Theory of NonLinear Elastic Structures　Proc. ASCE, ST12　1969. 12
*4 S.A. Saafan：　Theoretical Analysis of Suspension Roofs　Proc. ASCE, ST6　1970. 2