

東洋大学工学部 正員 高田孝信

正員 〇新延泰生

1. まえがき

本研究は昨年度の研究(板のせん断強度についての実験的研究)に続くものである。今回は座屈後の状態について、Karmanの微分方程式をある境界条件のもとで解き理論的検討を行なった。現在、これ迄の実験結果と比較検討中である。その際板の面内主応力の比即ち σ_x/σ_y がせん断座屈後如何に変化していくかを調べ、板がせん断座屈以上の負荷を受けた場合板が不完全張力場に如何に移行していくかを把握することを目指した。なお板の初期タワミは考慮していない。境界条件については板の曲げについては単純支持とし、板の相対する周辺の相対的変位は許していない。

2. Karmanの微分方程式とタワミの展開式

$$\nabla^4 F = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \dots (1-a), \quad \nabla^4 w = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \dots (1-b)$$

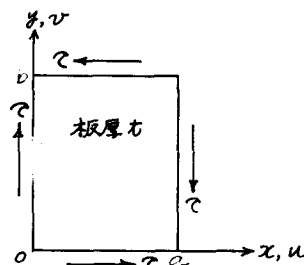
タワミ $w(x, y)$ は次の如く展開出来るものと仮定する。

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \dots (2)$$

3. 境界条件

① 周辺せん断応力について

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_{x=0, a} = -\tau, \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_{y=0, b} = -\tau \dots (3)$$

② タワミ $w(x, y)$ について

$$\left. \begin{aligned} w(0, y) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} &= 0 \\ w(a, y) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} &= 0 \\ w(x, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0} &= 0 \\ w(x, b) = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

③ 相対する周辺の相対変位は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u(a, y) - u(0, y) &= \int_0^a \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \\ v(x, b) - v(x, 0) &= \int_0^b \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

従って、仮定より、

$$\left. \begin{aligned} u(a, y) - u(0, y) &= 0 \\ v(x, b) - v(x, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

境界条件(3)、(4)は(2)式を仮定することにより自動的に満足される。

4. 基本式の誘導

(2)式を(1-a)式の右辺に代入すれば、次の(7)式を得られ、(7)式の解として(8)式を仮定する。

$$\nabla^4 F = \frac{Et^3\pi^4}{a^2b^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} H_{pq} \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \dots (7)$$

$$F(x, y) = \tau xy + Et^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} I_{pq} \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} + Ax^2 + By^2 \dots (8)$$

$$\text{但し、} I_{pq} = \frac{\beta^2 H_{pq}}{(p^2 + \beta^2 q^2)^2}, \quad \beta = \frac{a}{b} \dots (9)$$

⑧式の最後の二項は境界条件(7)を満足させる為のもので、定数A,Bを求めれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{E\pi^2}{16a^2} \frac{\nu}{1-\nu^2} \sum_m \sum_n m^2 a_{mn}^2 + \frac{E\pi^2}{16b^2} \frac{\nu}{1-\nu^2} \sum_m \sum_n n^2 a_{mn}^2 \\ B &= \frac{E\pi^2}{16a^2} \frac{1}{1-\nu^2} \sum_m \sum_n m^2 a_{mn}^2 + \frac{E\pi^2}{16b^2} \frac{1}{1-\nu^2} \sum_m \sum_n n^2 a_{mn}^2 \end{aligned} \right\} \text{----- (10)}$$

(8)式を(1-b)式へ代入し Galerkin's Methodを用いることにより次の未知数 a_{mn} を求める基本式が得られる。

$$\int_0^a \int_0^b \left[\nabla^4 w - \frac{t}{D} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] \times \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b} dx dy = 0 \text{----- (11)}$$

但し, $r=1, 2, \dots; \quad s=1, 2, \dots$

4. 数値計算

$m=n=1, 2$ の場合を考える。(11)式を計算すれば次の如き二元連立三次方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 a_{11}^3 + \phi_2 a_{11} a_{22}^2 + \phi_3 a_{11} + \phi_4 a_{22} &= 0 \\ \psi_1 a_{22}^3 + \psi_2 a_{22} a_{11}^2 + \psi_3 a_{22} + \psi_4 a_{11} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (12)}$$

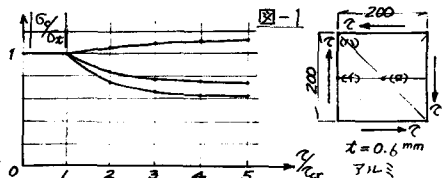
但し係数 $\phi_1, \phi_2, \dots, \psi_1, \psi_2, \dots$ は以下の如し。

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{E\pi^4}{64D} \frac{t^4}{ab} \left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{E\pi^4}{32D(1-\nu^2)} \frac{t^4}{ab} \left(2\nu + \beta^2 + \frac{1}{\beta^2} \right), \quad \phi_2 = \frac{4E\pi^4}{D} \frac{t^4}{ab} \left[\frac{\beta^2}{(1+\beta^2)^2} + \frac{\beta^2}{(9+\beta^2)^2} \right] + \frac{E\pi^4}{8D(1-\nu^2)} \frac{t^4}{ab} \left(2\nu + \beta^2 + \frac{1}{\beta^2} \right) \\ \phi_3 &= \frac{\pi^4}{4} \frac{t}{ab} \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right)^2, \quad \phi_4 = \frac{32t^3}{9D}, \quad \psi_1 = 16\phi_1, \quad \psi_2 = \phi_2, \quad \psi_3 = 16\phi_3, \quad \psi_4 = \phi_4 \quad \text{但し } D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned}$$

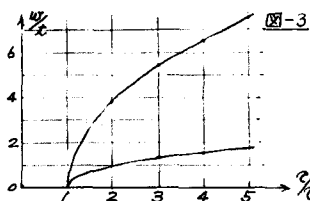
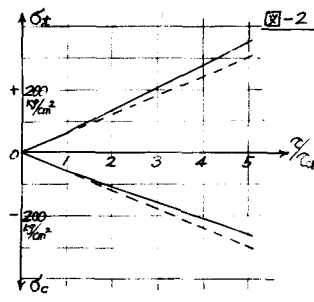
ϕ_x, ϕ_y, G_y は(8)式より次の如く得られる。

$$\begin{aligned} \phi_x / Et\pi^2 &= -\frac{a_{11}^2}{8\beta^2 b^2} \cos \frac{2\pi y}{b} - \frac{a_{22}^2}{2\beta^2 b^2} \cos \frac{4\pi y}{b} - \frac{4\beta^2 a_1 a_{22}}{(9+\beta^2)^2 b^2} \cos \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{36\beta^2 a_1 a_{22}}{(1+9\beta^2)^2 b^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b} + \frac{1}{8(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) (a_{11}^2 + 4a_{22}^2) \\ \phi_y / Et\pi^2 &= -\frac{a_{11}^2}{8\beta^2 a^2} \cos \frac{2\pi x}{a} - \frac{a_{22}^2}{2\beta^2 a^2} \cos \frac{4\pi x}{a} - \frac{36\beta^2 a_1 a_{22}}{(9+\beta^2)^2 a^2} \cos \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{4\beta^2 a_1 a_{22}}{(1+9\beta^2)^2 a^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{b} + \frac{1}{8(1-\nu^2)} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) (a_{11}^2 + 4a_{22}^2) \\ G_y / Et\pi^2 &= -\frac{t}{Et\pi^2} - \frac{12\beta^2 a_1 a_{22}}{(9+\beta^2)^2 ab} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - \frac{12\beta^2 a_1 a_{22}}{(1+9\beta^2)^2 ab} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} \end{aligned}$$

次に計算結果の一例を示す。図-1は座屈後の面内主応力の比即ち $\left| \frac{\sigma_x}{\sigma_c} \right|$ の値の変化を表わすものである。 $t=0.6\text{mm}$ ($t/b=1/333$)の場合が描かれているが $t=0.8\text{mm}$ ($t/b=1/250$), $t=0.4\text{mm}$ ($t/b=1/500$) に対しても図-1の傾向はほとんど変わらず, $t/b=1/250 \sim 1/500$ まででは $\left| \frac{\sigma_x}{\sigma_c} \right|$ の値の変化の傾向は板厚 t に無関係の様である。



本研究では、板の相対する周辺の相対的変位は許しておらず、相対変位を許す場合と比較すると、かなり性状が異なっている。図-2は相対変位を許さない場合の最大最小主応力の変化図であるが、相対変位を許すと最小主応力は σ_{cr} が大きくなるにつれて圧縮側より引張側に変る様である。図-3は板中心のタワミである。約4倍程度相対変位を許す場合の方が大きい結果が得られている。



参考文献: ① 土木学会論文集 136号 (1966年11月)

小西一郎・白石成人・渡辺英一「薄板の耐荷力に関する考察」

② 関西橋梁鉄骨溶接研究会

「プレートガーダーの耐荷力に関する理論と実験」

図-1に於て
(4)の位置の
タワミを表わす。