I-24 ゲルバーばりの座屈

九州大学工学部 正員 山崎徳也
長崎大学工学部 正員○崎山毅

1. まえがき

曲げ材の応力、変形などの解析に際し、基礎方程式を組み立てるに必要な諸要素の不連続性は、著しく式展開を煩雑にする。また、通常の解析方法では、各一様部分に対して、いわゆる分割されたかたちで解式がえられるために、種々の不便が生じる場合が少なくない。例えば、はり構造物においては、その力学的性状は断面積、曲げ剛性、たわみ、たわみ角、曲げモーメント、せん断力、荷重強度などの諸要素によって表わされるが、階段状変断面ばりの断面変化部における断面積、曲げ剛性の不連続性、ゲルバーばりの中間ヒンジ部におけるたわみ角の不連続性、連続ばりの中間支点におけるせん断力の不連続性、集中荷重あるいは部分的分布荷重による荷重関数の不連続性などが、おのおののはり構造物の解法を複雑にするのである。

ゲルバーばりは力のつり合い条件のみから応力を算定しうる簡単な静定構造物であるが、その変形あるいは振動性状、座屈性状などを解析する場合には、逆に、中間ヒンジの故に問題は複雑化する。著者らは諸種の不連続性を有する構造物の解法[1,2]を研究中であるが、その一つとして、ゲルバーばりの解法を提示し、これを用いて座屈現象の解析を行う。

2. 基礎方程式

大きさPなる軸圧縮力の作用を受ける一様断面直線ばりの座屈は、周知の次式で表わされる。

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+P\frac{d^2y}{dx^2}=0 \tag{1}$$

式(1)を、$\eta=x/l$ なる無次元変数を用いて書き直せば

$$\frac{d^4y}{d\eta^4}+k^2\frac{d^2y}{d\eta^2}=0 \tag{2}$$

ただし
$$k^2=\frac{Pl^2}{EI}$$

図-1に示すゲルバーばりの場合には、式(2)は $\eta=\xi_1,\xi_2$ なる点を除く全ての点、すなわち、ヒンジ点Hおよび中間支点Bを除く全ての点において成立する。ヒンジ点および中間支点は、これらの点において、それぞれたわみ角、せん断力が不連続となるので、はり上の他の点とは異なる特殊な点であると見なければならない。

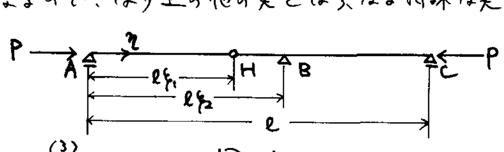


図-1

図-1のゲルバーばりの座屈方程式

$$\frac{d^4y}{d\eta^4}+k^2\frac{d^2y}{d\eta^2}=0 \qquad (\eta\neq\xi_1,\xi_2) \tag{3}$$

の解を次式の形で求めることとする。

$$y(\eta)=y_1(\eta)+y_2(\eta)u(\eta-\xi_1)+y_3(\eta)u(\eta-\xi_2) \tag{4}$$

ただし、函数 $y(\eta)$ は $0\leq\eta<\xi_1$、$\xi_1<\eta<\xi_2$、$\xi_2<\eta\leq1$ なる変域において意味を持つものであるが、函数 $y_1(\eta)$, $y_2(\eta)$, $y_3(\eta)$ は η の全ての変域において定義されるものである。なお、$u(\eta-\xi_1)$、$u(\eta-\xi_2)$ は単位階段函数である。

式(4)を方程式(3)に代入して

$$\frac{d^4y_1}{d\eta^4}+k^2\frac{d^2y_1}{d\eta^2}+\left(\frac{d^4y_2}{d\eta^4}+k^2\frac{d^2y_2}{d\eta^2}\right)u(\eta-\xi_1)+\left(\frac{d^4y_3}{d\eta^4}+k^2\frac{d^2y_3}{d\eta^2}\right)u(\eta-\xi_2)=0 \qquad (5)$$

単位階段函数の意味を考慮すれば、次の三式

$$\frac{d^4y_1}{d\eta^4}+k^2\frac{d^2y_1}{d\eta^2}=0 \quad (6\cdot a) \qquad \frac{d^4y_2}{d\eta^4}+k^2\frac{d^2y_2}{d\eta^2}=0 \quad (6\cdot b) \qquad \frac{d^4y_3}{d\eta^4}+k^2\frac{d^2y_3}{d\eta^2}=0 \quad (6\cdot c)$$

より得られる $y_1(\eta)$, $y_2(\eta)$, $y_3(\eta)$ によって構成される式(4)が方程式(5)の解であることがわかる。

三個の方程式 (6·a)、(6·b), (6·c) の解式中の各々4個づつ計12個の積分定数は次の12個の条件により決定される。すなわち

$\eta=0$;	$y_1(0)=0$	(7·a)	$y_1''(0)=0$	(7·b)
$\eta=1$;	$y_1(1)+y_2(1)+y_3(1)=0$	(7·c)	$y_1''(1)+y_2''(1)+y_3''(1)=0$	(7·d)
$\eta=\xi_1$;	$y_2(\xi_1)=0$	(7·e)	たわみの連続条件	
	$y_1''(\xi_1)=0$	(7·f)	曲げモーメント零の条件	
	$y_2''(\xi_1)=0$	(7·g)	曲げモーメント零の条件	
	$y_2'''(\xi_1)=0$	(7·h)	せん断力の連続条件	
$\eta=\xi_2$;	$y_1(\xi_2)+y_2(\xi_2)=0$	(7·i)	たわみ零の条件	
	$y_3(\xi_2)=0$	(7·j)	たわみ零の条件	
	$y_3'(\xi_2)=0$	(7·k)	たわみ角の連続条件	
	$y_3''(\xi_2)=0$	(7·l)	曲げモーメントの連続条件	

これより判る通り、ゲルバーばりのたわみを式(4)のかたちで表わせば、ヒンジ点および中間支点における条件式が極めて簡単なものとなる。

条件 (7·a), (7·b) の下に方程式 (6·a) の解を求めれば

$$y_1(\eta)=y_1'(0)\cdot\eta+\frac{y_1'''(0)}{k^2}\left(\eta-\frac{1}{k}\sin k\eta\right) \qquad (8\cdot a)$$

方程式 (6·b) の解は、条件 (7·e), (7·g), (7·h) を考慮して

$$y_2(\eta)=y_2'(\xi_1)\cdot(\eta-\xi_1) \qquad (8\cdot b)$$

また、(7·j), (7·k), (7·l) なる条件を満足する方程式 (6·c) の解は

$$y_3(\eta)=\frac{y_3'''(\xi_2)}{k^2}\left[(\eta-\xi_2)-\frac{1}{k}\sin k(\eta-\xi_2)\right] \qquad (8\cdot c)$$

したがって、ゲルバーばりの座屈形 $y(\eta)$ は (8·a), (8·b), (8·c) を式(4)に代入して

$$y(\eta)=y_1'(0)\eta+\frac{y_1'''(0)}{k^2}\left(\eta-\frac{1}{k}\sin k\eta\right)+y_2'(\xi_1)(\eta-\xi_1)u(\eta-\xi_1)+\frac{y_3'''(\xi_2)}{k^2}\left[(\eta-\xi_2)-\frac{1}{k}\sin k(\eta-\xi_2)\right]u(\eta-\xi_2) \qquad (9)$$

また
$$y''(\eta)=\frac{y_1''(0)}{k^2}(k\cdot\sin k\eta)+\frac{y_3'''(\xi_2)}{k^2}\left[k\sin k(\eta-\xi_2)\right]u(\eta-\xi_2) \qquad (10)$$

次に、残りの条件(7·c)、(7·d)、(7·f)、(7·i)より次の連立方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-\frac{1}{k}\sin k & 1-\xi_1 & (1-\xi_2)-\frac{1}{k}\sin k(1-\xi_2) \\ 0 & k\sin k & 0 & k\sin k(1-\xi_2) \\ 0 & k\sin k\xi_1 & 0 & 0 \\ \xi_2 & \xi_2-\frac{1}{k}\sin k\xi_2 & \xi_2-\xi_1 & 0 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} y_1'(0) \\ y_1''(0)/k^2 \\ y_2'(\xi_1) \\ y_3'''(\xi_2)/k^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

したがって、ゲルバーばりの座屈条件式として、次の二式をえる。

$$\sin k\xi_1 = 0 \qquad (11)$$
$$\sin k(1-\xi_2) = 0 \qquad (12)$$

(11)および(12)の条件式によって表わされる座屈をそれぞれ第I形式座屈および第II形式座屈と称することにする。

3. 考察および数値計算

(1) 第I形式座屈

座屈条件式(11)によって表わされる座屈はゲルバーばりの吊りスパンAHに部分的な座屈が生じ、それに付随して、アンカースパンBC、張出しスパンHBにも変形が生ずるという形式のものである。
この時の座屈荷重の最小値 $P_{I,cr}$ は

$$P_{I,cr}=\left(\frac{\pi}{\xi_1}\right)^2\frac{EI}{l^2}$$

また、座屈波形 $y(\eta)$ は

$$y(\eta)=\frac{y_1''(0)}{k^2}\left\{(1+\alpha)\eta-\frac{1}{k}\sin k\eta+\beta(\eta-\xi_1)u(\eta-\xi_1)+\gamma\left[(\eta-\xi_2)-\frac{1}{k}\sin k(\eta-\xi_2)\right]u(\eta-\xi_2)\right\}$$
$$\alpha=\frac{1-\xi_1}{\xi_1(1-\xi_2)}\cdot\frac{\sin k\xi_2}{k}-\frac{\xi_2-\xi_1}{\xi_1}\cdot\frac{\sin k}{\sin k(1-\xi_2)}-1$$
$$\beta=\frac{\xi_2}{\xi_1}\frac{\sin k}{\sin k(1-\xi_2)}-\frac{1}{\xi_1(1-\xi_2)}\frac{\sin k\xi_2}{k}$$
$$\gamma=-\frac{\sin k}{\sin k(1-\xi_2)}$$

(2) 第II形式座屈

座屈条件式(12)によって表わされる座屈はゲルバーばりのアンカースパンBCに部分的な座屈が生じ、それに付随して、張出しスパンHBおよび吊りスパンAHに変位が生ずる形式のものである。
この時の座屈荷重の最小値 $P_{II,cr}$ は

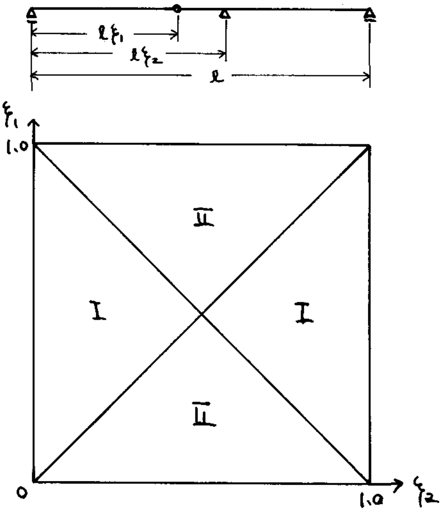
$$P_{II,cr}=\left(\frac{\pi}{1-\xi_2}\right)^2\frac{EI}{l^2}$$

また座屈波形 $y(\eta)$ は

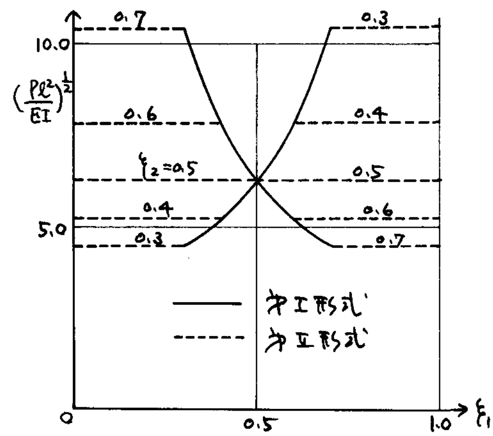
$$y(\eta)=\frac{y_3'''(\xi_2)}{k^2}\left\{\delta\cdot\eta+\varepsilon\cdot(\eta-\xi_1)u(\eta-\xi_1)-\left[\frac{1}{k}\sin k(\eta-\xi_2)-(\eta-\xi_2)\right]u(\eta-\xi_2)\right\}$$
$$\delta=\frac{\xi_2-\xi_1}{\xi_1}$$
$$\varepsilon=-\frac{\xi_2}{\xi_1}$$

(3) 第I形式および第II形式座屈の発生条件

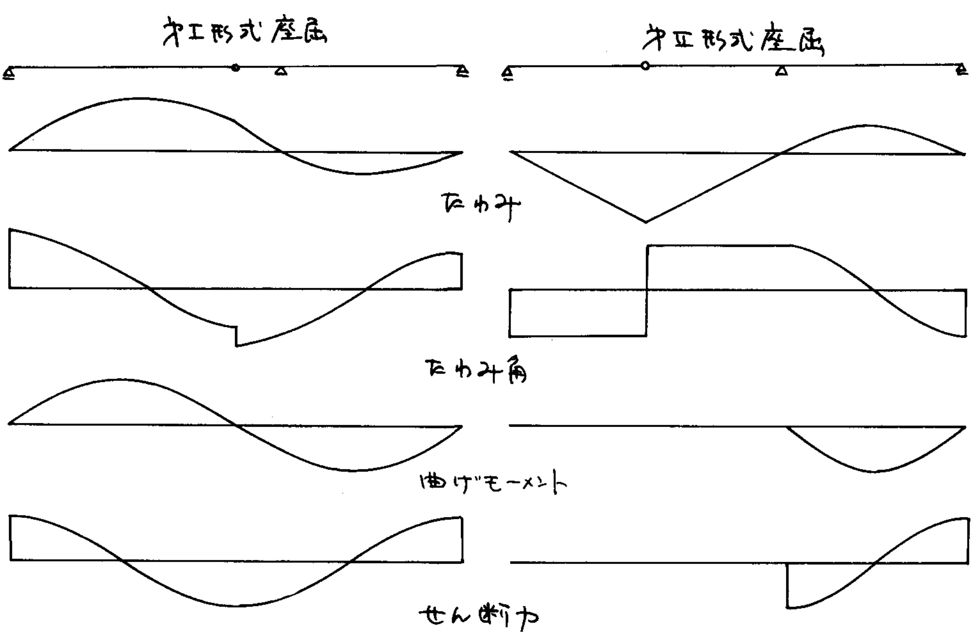
与えられたゲルバーばりが第I形式で座屈するか第II形式で座屈するかは $P_{I,cr}$ と $P_{II,cr}$ との大小関係によって、すなわち、ヒンジと中間支点との位置関係によって決まる。この相関関係を図−2に示す。また、図−3はヒンジ位置および中間支点位置と座屈荷重との関係を示すものである。中間支点を固定してヒンジ位置を変化させるとゲルバーばりの座屈は第II形式から第I形式に移り、さらに第II形式にもどることがわかる。図−4は第I形式および第II形式の座屈波形を表わす。



図−2



図−3



図−4

(参考文献)

(1) 崎山毅「3ヒンジアーチの自由振動」第24回年次学術講演会 (2) 崎山毅「集中質量を有する梁の自由振動解法」第19回応用力学連合講演会