

関西大学工学部 正会員 三上 市蔵

関西大学工学部 正会員 赤松 洋一

関西大学工学部 正会員 米沢 博

1. まえがき ソリッド・リブ・アーチの腹板などに適用することを目的として、これまで極異方性扇形板の曲げ座屈の解析を試み、Frobeniusの方法による厳密解¹⁾、Galerkin法²⁾およびFinite Strip Method³⁾による近似解をそれぞれ誘導した。これらの解を用いて座屈荷重を計算することができるが、前の2つの方法では桁落ち、第3の方法では収束の悪さという、それぞれ数値計算上の難点があって、精度のよい結果をいつも得られるとは限らないようである。そこで、桁落ちを防ぎ好精度の結果を得るため、微分方程式の解をべき級数にTaylor展開する場合の展開の中心を変えて導いた。扇形板の境界条件としては、直線辺が単純支持され、曲線辺が単純支持あるいは固定されている場合を考えた。

2. 極異方性扇形板の微分方程式の解 図-1に示すような純曲げを受ける極異方性扇形板が座屈したときのたわみ曲面の微分方程式はつぎようになる。

$$\begin{aligned} D_r \left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^3 w}{r \partial r^3} \right) + 2H \left(\frac{\partial^4 w}{r^2 \partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^3 w}{r^3 \partial r \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{r^4 \partial \theta^2} \right) \\ + D_\theta \left(-\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial r^2} + \frac{\partial w}{r^3 \partial r} + 2 \frac{\partial^2 w}{r^4 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{r^4 \partial \theta^4} \right) \\ = N_0 \left(1 - 2 \frac{r - r_i}{r_0 - r_i} \right) \left(\frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

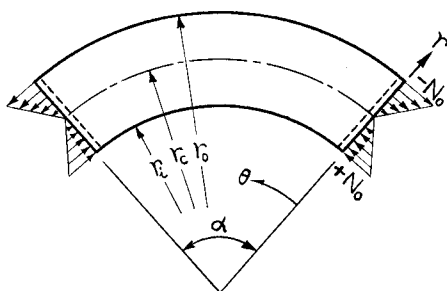


図-1

ここに、 $H = \kappa \sqrt{D_r D_\theta}$ 、 D_r 、 D_θ は半径方向および接線方向の曲げ剛さである。

式(1)の解を

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} R(r) \sin(m\pi\theta/\alpha), \quad r = r_0 \eta \quad (2)$$

と仮定し、式(1)に代入するとつぎようになる。

$$\frac{d^4 R}{d\eta^4} + \frac{2}{\eta} \frac{d^3 R}{d\eta^3} - \frac{\delta}{\eta^2} \frac{d^2 R}{d\eta^2} + \left[\frac{\gamma}{\eta^3} - \frac{\mu}{\eta} \left(\frac{\beta}{\eta} - 1 \right) \right] \frac{dR}{d\eta} + \left[-\frac{\delta}{\eta^4} + \frac{\mu}{\eta} \left(\frac{\beta}{\eta} - 1 \right) \right] R = 0 \quad (3)$$

ただし、 $\rho = r_i/r_0$ 、 $\gamma = 2\kappa\psi\sqrt{D_\theta/D_r} + D_\theta/D_r$ 、 $\delta = \gamma - (D_\theta/D_r)(1-\psi)^2$ 、 $\psi = (m\pi/\alpha)^2$ 、 $\beta = (1+\rho)/2$ 、 $\mu = (N_0 r_0^2/D_r)\psi(1+\rho)/\beta(1-\rho)$ である。

式(3)の微係数 $d^3 R/d\eta^3$ 、 $d^2 R/d\eta^2$ などの係数は $\eta=0$ において無限大になる。このような場合Frobenius法ではべき級数解として $R(\eta) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \eta^{i+\lambda}$ を考える。しかしその解は数値計算上桁落

1) 米沢・三上・赤松：扇形板の曲げ座屈，土木学会(関西支部)年次学術講演会概要集，昭44.5，P. I-10

2) 米沢・三上・武田・赤松：扇形板の曲げ座屈(近似解法)，土木学会年次学術講演会講演集 第1部，昭44.9，P. I-124

3) 三上・武田・赤松・米沢：Finite Strip Methodによる扇形板の曲げ座屈，土木学会(関西支部)年次学術講演会概要集，昭45.5，P. I-38

ちがひどく実用的でないので、ここでは解を扇形板の中央線 $r=r_0=\beta r_0$ ，すなわち $\chi=\beta$ のまわりに展開する。 $\chi=\xi+\beta$ とおくと、式(3)は

$$(\xi+\beta)^4 \frac{d^4 R}{d\xi^4} + 2(\xi+\beta)^3 \frac{d^3 R}{d\xi^3} - \gamma(\xi+\beta)^2 \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \left[\gamma(\xi+\beta) + \frac{\mu}{\psi} \xi(\xi+\beta)^3 \right] \frac{dR}{d\xi} + [-\delta - \mu \xi(\xi+\beta)^2] R = 0 \quad (4)$$

となる。式(4)の解を $R = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \xi^i$ とおき、ベキ級数による解法を用いるとつぎのようになる。

$$R = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \xi^i A_{0,i} \right) g_0 + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \xi^i A_{1,i} \right) g_1 + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \xi^i A_{2,i} \right) g_2 + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \xi^i A_{3,i} \right) g_3 \quad (5)$$

ここに $g_0 \sim g_3$ は積分定数で、 A は $i=0 \sim 6$ に対して

$$A_{0,0}=1, A_{0,1}=0, A_{0,2}=0, A_{0,3}=0, A_{0,4}=\delta/24\beta^4, A_{0,5}=-(144\beta^3 A_{0,4} - \mu\beta^2)/120\beta^4, \\ A_{0,6}=-\{300\beta^2 A_{0,5} + (144-6\gamma)\beta A_{0,4} - \mu\}/180\beta^3,$$

$$A_{1,0}=0, A_{1,1}=1, A_{1,2}=0, A_{1,3}=0, A_{1,4}=-\gamma/24\beta^3, A_{1,5}=-\{144\beta^3 A_{1,4} + \gamma - \delta + \mu\beta^3/\psi\}/120\beta^4, \\ A_{1,6}=-\{600\beta A_{1,5} + (288-12\gamma)A_{1,4} + \mu(3/\psi-1)\}/360\beta^2,$$

$$A_{2,0}=0, A_{2,1}=0, A_{2,2}=1, A_{2,3}=0, A_{2,4}=\gamma/12\beta^2, A_{2,5}=-(72\beta^2 A_{2,4} - \gamma)/60\beta^3, \\ A_{2,6}=-\{600\beta^3 A_{2,5} + (288-12\gamma)\beta^2 A_{2,4} - \delta + 2\mu\beta^3/\psi\}/360\beta^4,$$

$$A_{3,0}=0, A_{3,1}=0, A_{3,2}=0, A_{3,3}=1, A_{3,4}=-1/2\beta, A_{3,5}=-(24\beta A_{3,4} + 6 - \gamma)/20\beta^2, \\ A_{3,6}=-\{200\beta^2 A_{3,5} + (96-4\gamma)\beta A_{3,4} + 12 - 3\gamma\}/120\beta^3,$$

となり、 $i \geq 7$ に対しては漸化式

$$A_n = -\{2(n-1)(n-2)(n-3)(2n-7)\beta^3 A_{n-1} + (n-2)(n-3)\{6(n-4)^2 - \gamma\}\beta^2 A_{n-2} + (n-3)(2n-9)\{2(n-4)(n-5) - \gamma\}\beta A_{n-3} + \{(n-4)(n-6)((n-5)^2 - \gamma) - \delta\} A_{n-4} + \mu\{(n-4)\beta^3 A_{n-4}/\psi + (3(n-5)/\psi - 1)\beta^2 A_{n-5} + (3(n-6)/\psi - 2)\beta A_{n-6} + ((n-7)/\psi - 1) A_{n-7}\}]/n(n-1)(n-2)(n-3)\beta^4$$

を用いて計算される。

3. 座屈荷重方程式 式(2)を式(5)とともに境界条件式に代入し、積分定数 $g_0 \sim g_3$ の係数行列式を0とおけば座屈荷重方程式が得られる。たとえば曲線辺が固定されている場合はつぎのようになる。

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i A_{0,i} & \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i A_{1,i} & \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i A_{2,i} & \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i A_{3,i} \\ \sum_{i=0}^{\infty} (-\Delta)^i A_{0,i} & \sum_{i=0}^{\infty} (-\Delta)^i A_{1,i} & \sum_{i=0}^{\infty} (-\Delta)^i A_{2,i} & \sum_{i=0}^{\infty} (-\Delta)^i A_{3,i} \\ \sum_{i=0}^{\infty} i \Delta^{i-1} A_{0,i} & \sum_{i=0}^{\infty} i \Delta^{i-1} A_{1,i} & \sum_{i=0}^{\infty} i \Delta^{i-1} A_{2,i} & \sum_{i=0}^{\infty} i \Delta^{i-1} A_{3,i} \\ \sum_{i=0}^{\infty} i(-\Delta)^{i-1} A_{0,i} & \sum_{i=0}^{\infty} i(-\Delta)^{i-1} A_{1,i} & \sum_{i=0}^{\infty} i(-\Delta)^{i-1} A_{2,i} & \sum_{i=0}^{\infty} i(-\Delta)^{i-1} A_{3,i} \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

ただし、 $\Delta = (1-\rho)/2$ 。座屈係数 $k = N_b b / D_0 \pi^2$ を考えると $\mu = k(D_0 \pi^2 \psi / 4 D_0 \Delta^3)$ となるので、式(6)のような座屈荷重方程式を満足する座屈係数 k を走査法によって求めればよい。曲げが逆方向に作用する場合の座屈係数は座屈荷重方程式の負の根を求めればよい。

4. 数値計算結果 一例として $\rho = r_i/r_0 = 0.25$ で

曲線辺が単純支持および固定の場合について α の値を種々変えて計算した結果を図-2に示す。なお計算には京都大学大型計算機センターの FACOM 230-60 を使用した。

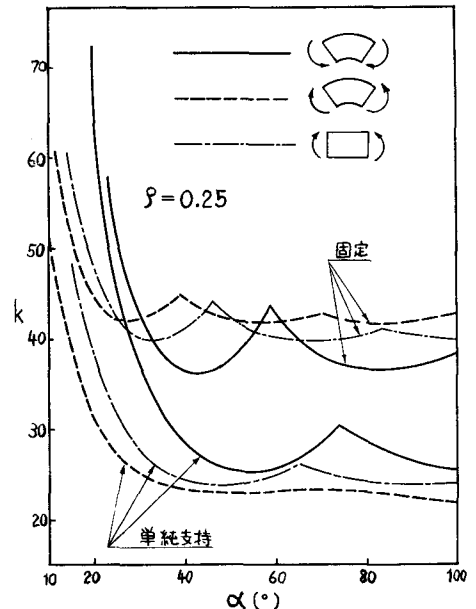


図-2