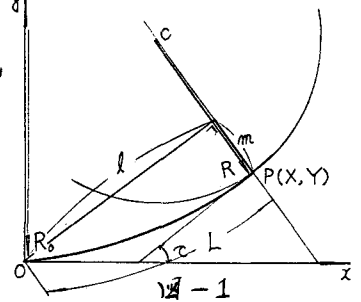


I-1 フロソイド曲線桁の断面力特性 (第一報)

北海道大学 学生員 杉本博之

- (1) フロソイド曲線 フロソイド曲線の定義および特性は 文献(1), (2)に詳細に述べられているが 主な記号の定義 数式を列記すると 図-1において,
 τ はフロソイド曲線の始点の単位フロソイド曲線におけるらせん角
 θ はフロソイド曲線の終点の始点からのらせん角 A は
 フロソイドのパラメーターである。

$$\begin{aligned} \text{また } X &= \frac{A}{\sqrt{2}} \int_0^\tau \frac{\cos \tau}{\sqrt{\tau_0 + \tau}} d\tau, \quad Y = \frac{A}{\sqrt{2}} \int_0^\tau \frac{\sin \tau}{\sqrt{\tau_0 + \tau}} d\tau \\ l &= X \cos \tau + Y \sin \tau = \frac{A}{\sqrt{2}} \int_0^\tau \frac{\cos(\tau - \theta)}{\sqrt{\tau_0 + \theta}} d\theta \\ m &= \frac{A}{\sqrt{2}} \int_0^\tau \frac{\sin(\tau - \theta)}{\sqrt{\tau_0 + \theta}} d\theta \end{aligned}$$



- (2) フロソイド曲線静定単純桁の理論 (反力・断面力) 図-2のように終点においてねじりを拘束した桁を 静定単純桁と考える。また w を載荷点 τ を考える点の始点からのらせん角とする。

以下に使用する反力・断面力の符号は文献(3)を参照されたい。

i) 垂直力 P が作用する場合

i) 反力 x, y 方向 モーメントの三均合条件式より

$$V_P(0, w) = P \frac{(X_{\tau_1} - X_w) \times \cos \tau_1 + (Y_{\tau_1} - Y_w) \times \sin \tau_1}{X_{\tau_1} \times \cos \tau_1 + Y_{\tau_1} \times \sin \tau_1}$$

$$V_P(\tau, w) = P \frac{X_w \times \cos \tau_1 + Y_w \times \sin \tau_1}{X_{\tau_1} \times \cos \tau_1 + Y_{\tau_1} \times \sin \tau_1}$$

$$T_P(\tau, w) = P \frac{X_{\tau_1} \times Y_w - Y_{\tau_1} \times X_w}{X_{\tau_1} \times \cos \tau_1 + Y_{\tau_1} \times \sin \tau_1}$$

ここで

$$X_{\tau_1} \times \cos \tau_1 + Y_{\tau_1} \times \sin \tau_1 = \frac{A}{\sqrt{2}} \int_0^{\tau_1} \frac{\cos(\tau_1 - \theta)}{\sqrt{\tau_0 + \theta}} d\theta = \frac{A}{\sqrt{2}} \times UC(\tau_1, 0)$$

$$(X_{\tau_1} - X_w) \times \cos \tau_1 + (Y_{\tau_1} - Y_w) \times \sin \tau_1 = \frac{A}{\sqrt{2}} \int_w^{\tau_1} \frac{\cos(\tau_1 - \theta)}{\sqrt{\tau_0 + \theta}} d\theta = \frac{A}{\sqrt{2}} \times UC(\tau, w)$$

$$X_w \times \cos \tau_1 + Y_w \times \sin \tau_1 = \frac{A}{\sqrt{2}} \int_0^w \frac{\cos(\tau_1 - \theta)}{\sqrt{\tau_0 + \theta}} d\theta = \frac{A}{\sqrt{2}} (UC(\tau_1, 0) - UC(\tau, w))$$

$$X_{\tau_1} \times Y_w - Y_{\tau_1} \times X_w = \frac{A^2}{2} \times \left(\int_0^{\tau_1} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\tau_0 + \theta}} d\theta \times \int_0^w \frac{\sin \theta}{\sqrt{\tau_0 + \theta}} d\theta - \int_0^{\tau_1} \frac{\sin \theta}{\sqrt{\tau_0 + \theta}} d\theta \times \int_0^w \frac{\cos \theta}{\sqrt{\tau_0 + \theta}} d\theta \right)$$

ただし

$$UC(\alpha, \beta) = \int_\beta^\alpha \frac{\cos(\alpha - \theta)}{\sqrt{\tau_0 + \theta}} d\theta, \quad US(\alpha, \beta) = \int_\beta^\alpha \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\sqrt{\tau_0 + \theta}} d\theta$$

よって

$$V_P(0, w) = P \times UC(\tau_1, w) / UC(\tau_1, 0), \quad V_P(\tau, w) = P \times (UC(\tau_1, 0) - UC(\tau, w)) / UC(\tau_1, 0)$$

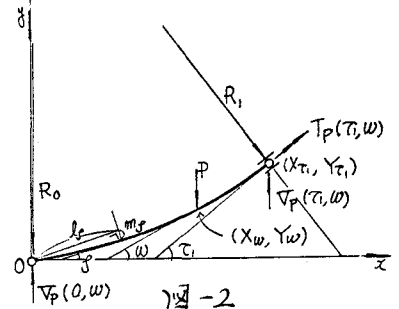
$$T_P(\tau, w) = \frac{A \times P}{\sqrt{2}} \times (UC(\tau_1, 0) \times US(\tau, w) - US(\tau_1, 0) \times UC(\tau, w)) / UC(\tau_1, 0)$$

となる。

ii) 断面力 x, y 方向 モーメントの三均合条件式より,

・ $0 \leq \tau \leq w$ の場合

$$Q_\tau(\tau, w) = V_P(0, w) = P \times UC(\tau_1, w) / UC(\tau_1, 0)$$



$$M_P(f, w) = -T_P(0, w) \times l_f = -\frac{A \times P}{\sqrt{2}} \times UC(\tau_1, w) \times UC(f, 0) / UC(\tau_1, 0)$$

$$T_P(f, w) = -T_P(0, w) \times m_f = -\frac{A \times P}{\sqrt{2}} \times UC(\tau_1, w) \times US(f, 0) / UC(\tau_1, 0)$$

$w \leq f \leq \tau_1$ の場合

$$Q_P(f, w) = P \times (UC(\tau_1, w) - UC(\tau_1, 0)) / UC(\tau_1, 0)$$

$$M_P(f, w) = -\frac{A \times P}{\sqrt{2}} \times (UC(\tau_1, w) \times UC(f, 0) - UC(f, w) \times UC(\tau_1, 0)) / UC(\tau_1, 0)$$

$$T_P(f, w) = -\frac{A \times P}{\sqrt{2}} \times (UC(\tau_1, w) \times US(f, 0) - US(f, w) \times UC(\tau_1, 0)) / UC(\tau_1, 0)$$

以下同様に 集中荷重M, Tが作用した場合の結果のみを書くと,

ロ) 曲げモーメントMが作用する場合

i) 反力 $V_H(0, w) = -\frac{\sqrt{2} M}{A} \times \cos(\tau_1 - w) / UC(\tau_1, 0)$, $V_H(\tau_1, w) = \frac{\sqrt{2} M}{A} \times \cos(\tau_1 - w) / UC(\tau_1, 0)$

$$T_H(\tau_1, w) = M \times (\cos(\tau_1 - w) \times US(\tau_1, 0) - \sin(\tau_1 - w) \times UC(\tau_1, 0)) / UC(\tau_1, 0)$$

ii) 断面力

o $0 \leq f \leq w$ の場合 $Q_H(f, w) = -\frac{\sqrt{2} M}{A} \cos(\tau_1 - w) / UC(\tau_1, 0)$

$$M_H(f, w) = M \times \cos(\tau_1 - w) \times UC(f, 0) / UC(\tau_1, 0), T_H(f, w) = M \times \cos(\tau_1 - w) \times US(f, 0) / UC(\tau_1, 0)$$

o $w \leq f \leq \tau_1$ の場合 $Q_H(f, w) = -\frac{\sqrt{2} M}{A} \cos(\tau_1 - w) / UC(\tau_1, 0)$

$$M_H(f, w) = M \times (\cos(\tau_1 - w) \times UC(f, 0) - \cos(f - w) \times UC(\tau_1, 0)) / UC(\tau_1, 0)$$

$$T_H(f, w) = M \times (\cos(\tau_1 - w) \times US(f, 0) - \sin(f - w) \times UC(\tau_1, 0)) / UC(\tau_1, 0)$$

リ) ねじりモーメントTが作用する場合

i) 反力 $V_T(0, w) = \frac{\sqrt{2} T}{A} \sin(\tau_1 - w) / UC(\tau_1, 0)$, $V_T(\tau_1, w) = -\frac{\sqrt{2} T}{A} \sin(\tau_1 - w) / UC(\tau_1, 0)$

$$T_T(\tau_1, w) = -T \times (\sin(\tau_1 - w) \times US(\tau_1, 0) + \cos(\tau_1 - w) \times UC(\tau_1, 0)) / UC(\tau_1, 0)$$

ii) 断面力

o $0 \leq f \leq w$ の場合 $Q_T(f, w) = \frac{\sqrt{2} T}{A} \sin(\tau_1 - w) / UC(\tau_1, 0)$

$$M_T(f, w) = -T \times \sin(\tau_1 - w) \times UC(f, 0) / UC(\tau_1, 0), T_T(f, w) = -T \times \sin(\tau_1 - w) \times US(f, 0) / UC(\tau_1, 0)$$

o $w \leq f \leq \tau_1$ の場合 $Q_T(f, w) = \frac{\sqrt{2} T}{A} \sin(\tau_1 - w) / UC(\tau_1, 0)$

$$M_T(f, w) = -T \times (\sin(\tau_1 - w) \times UC(f, 0) - \sin(f - w) \times UC(\tau_1, 0)) / UC(\tau_1, 0)$$

$$T_T(f, w) = -T \times (\sin(\tau_1 - w) \times US(f, 0) + \cos(f - w) \times UC(\tau_1, 0)) / UC(\tau_1, 0)$$

(3) $UC(\alpha, \beta)$, $US(\alpha, \beta)$ の計算

$$UC(\alpha, \beta) = \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\cos(\alpha - \theta)}{\sqrt{\tau_0 + \theta}} d\theta$$

$$= 2 \times \int_{\sqrt{\tau_0 + \beta}}^{\sqrt{\tau_0 + \alpha}} \cos(\tau_0 + \alpha - u^2) du$$

$$= 2 \{ \cos(\tau_0 + \alpha) \times \int \cos u^2 du + \sin(\tau_0 + \alpha) \times \int \sin u^2 du \}$$

ここで

$$f(x) = \int \cos x^2 dx = x - \frac{x^5}{5 \times 2.7} + \frac{x^9}{9 \times 4.7} - \frac{x^{13}}{13 \times 6.7} + \dots$$

$$g(x) = \int \sin x^2 dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \times 3.7} + \frac{x^{11}}{11 \times 5.7} - \frac{x^{15}}{15 \times 7.7} + \dots$$

$$\sqrt{\tau_0 + \alpha} = x, \sqrt{\tau_0 + \beta} = y \quad \text{と置く}$$

$$UC(\alpha, \beta) = 2 \times \{ \cos x^2 \times (f(x) - f(y)) + \sin x^2 \times (g(x) - g(y)) \}$$

同様にして

$$US(\alpha, \beta) = 2 \times \{ \sin x^2 \times (f(x) - f(y)) - \cos x^2 \times (g(x) - g(y)) \}$$

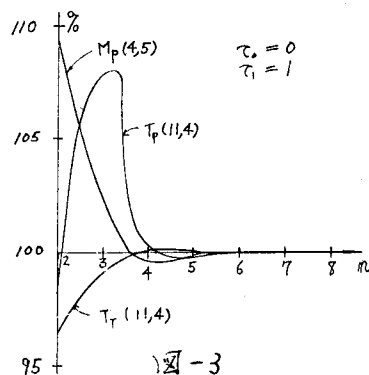


図-3は $f(x)$, $g(x)$ の収束の状況を調べたもので $t_0=0$, $t_1=1$ の時の $M_p(4,5)$, $T_p(11,4)$, $T_r(11,4)$ の値を $n=19$ つまり $f(x)$ を 10 項 $g(x)$ を 9 項とった時の値を 100 とした時の項数による値をプロットしたものである。計算の結果によると $n=8$ つまり $f(x)$ $g(x)$ がそれぞれ 4 項で $t_1=100.000$ の値をとっており $n=6$ では $M_p(4,5)$ で 100.011, $T_p(11,4)$ で 99.992, $T_r(11,4)$ では 99.996 である。

(4) クロソイド曲線静定単統桁の理論 (変形) 紙面の都合上 集中荷重 P の載荷したときの数式の列挙にとどめるが なお詳細な過程, 記号の定義は文献(3)等を参照されたい。

なお 以下で EI は曲げ剛性 GI_T はねじり剛性 φ はたわみ, β はたわみ角, θ はねじり角である。

○ $0 \leq f \leq w$ の場合

$$f_{MP}(f, w) = \frac{A^3 P}{2\sqrt{2}EI \times UC(t, 0)^2} \times \{ UC(t, w) \times (UC(t, f) \times VC(t, 0, 0, 0) - UC(t, 0) \times VC(t, f, f, 0)) - UC(t, 0) \times (UC(t, f) \times VC(t, w, w, 0) - UC(t, 0) \times VC(t, w, w, f)) \}$$

$$f_{TP}(f, w) = \frac{A^3 P}{2\sqrt{2}GI_T \times UC(t, 0)^2} \times \{ UC(t, w) \times (UC(t, f) \times VS(t, 0, 0, 0) - UC(t, 0) \times VS(t, f, f, 0)) - UC(t, 0) \times (UC(t, f) \times VS(t, w, w, 0) - UC(t, 0) \times VS(t, w, w, f)) \}$$

$$\beta_{MP}(f, w) = -\frac{A^3 P}{2EI \times UC(t, 0)^2} \times \{ UC(t, w) \times (\cos(t-f) \times VC(t, 0, 0, 0) - UC(t, 0) \times WCC(t, f, f, 0)) - UC(t, 0) \times (\cos(t-f) \times VC(t, w, w, 0) - UC(t, 0) \times WCC(t, w, f, w)) \}$$

$$\beta_{TP}(f, w) = -\frac{A^3 P}{2GI_T \times UC(t, 0)^2} \times \{ UC(t, w) \times (\cos(t-f) \times VS(t, 0, 0, 0) - UC(t, 0) \times WSS(t, f, f, 0)) - UC(t, 0) \times (\cos(t-f) \times VS(t, w, w, 0) - UC(t, 0) \times WSS(t, w, f, w)) \}$$

$$\theta_{MP}(f, w) = \frac{A^3 P}{2EI \times UC(t, 0)^2} \times \{ UC(t, w) \times (\sin(t-f) \times VC(t, 0, 0, 0) - UC(t, 0) \times WSC(t, f, f, 0)) - UC(t, 0) \times (\sin(t-f) \times VC(t, w, w, 0) - UC(t, 0) \times WSC(t, w, f, w)) \}$$

$$\theta_{TP}(f, w) = \frac{A^3 P}{2GI_T \times UC(t, 0)^2} \times \{ UC(t, w) \times (\sin(t-f) \times VS(t, 0, 0, 0) + UC(t, 0) \times WCS(t, f, f, 0)) - UC(t, 0) \times (\sin(t-f) \times VS(t, w, w, 0) + UC(t, 0) \times WCS(t, w, f, w)) \}$$

○ $w \leq f \leq t_1$ の場合

$$f_{MP}(f, w) = \frac{A^3 P}{2\sqrt{2}EI \times UC(t, 0)^2} \times \{ UC(t, f) \times (UC(t, w) \times VC(t, 0, 0, 0) - UC(t, 0) \times VC(t, w, w, 0)) - UC(t, 0) \times (UC(t, w) \times VC(t, f, f, 0) - UC(t, 0) \times VC(t, f, f, w)) \}$$

$$f_{TP}(f, w) = \frac{A^3 P}{2\sqrt{2}GI_T \times UC(t, 0)^2} \times \{ UC(t, f) \times (UC(t, w) \times VS(t, 0, 0, 0) - UC(t, 0) \times VS(t, w, w, 0)) - UC(t, 0) \times (UC(t, w) \times VS(t, f, f, 0) - UC(t, 0) \times VS(t, f, f, w)) \}$$

$$\beta_{MP}(f, w) = -\frac{A^3 P}{2EI \times UC(t, 0)^2} \times \{ UC(t, w) \times (\cos(t-f) \times VC(t, 0, 0, 0) - UC(t, 0) \times WCC(t, f, f, 0)) - UC(t, 0) \times (\cos(t-f) \times VC(t, w, w, 0) - UC(t, 0) \times WCC(t, f, f, w)) \}$$

$$\beta_{TP}(f, w) = -\frac{A^3 P}{2GI_T \times UC(t, 0)^2} \times \{ UC(t, w) \times (\cos(t-f) \times VS(t, 0, 0, 0) - UC(t, 0) \times WSS(t, f, f, 0)) - UC(t, 0) \times (\cos(t-f) \times VS(t, w, w, 0) - UC(t, 0) \times WSS(t, f, f, w)) \}$$

$$\theta_{MP}(f, w) = \frac{A^3 P}{2EI \times UC(t, 0)^2} \times \{ UC(t, w) \times (\sin(t-f) \times VC(t, 0, 0, 0) - UC(t, 0) \times WSC(t, f, f, 0)) - UC(t, 0) \times (\sin(t-f) \times VC(t, w, w, 0) - UC(t, 0) \times WSC(t, f, f, w)) \}$$

$$\theta_{TP}(f, w) = \frac{A^3 P}{2GI_T \times UC(t, 0)^2} \times \{ UC(t, w) \times (\sin(t-f) \times VS(t, 0, 0, 0) + UC(t, 0) \times WCS(t, f, f, 0)) - UC(t, 0) \times (\sin(t-f) \times VS(t, w, w, 0) + UC(t, 0) \times WCS(t, f, f, w)) \}$$

(5) TC, TS, WCC, WCS, WSC, WSSの計算

$$\begin{aligned} TC(\beta_2, \beta_1, d_1, d_2) &= \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left\{ \int_{d_1}^d \frac{\cos(d-\theta)}{\sqrt{T_0+\theta}} d\theta \times \int_{d_2}^d \frac{\cos(d-\theta)}{\sqrt{T_0+\theta}} d\theta \right\} \frac{dd}{\sqrt{T_0+d}} \\ &= 4 \times \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left\{ \int_{\sqrt{T_0+d_1}}^{\sqrt{T_0+d}} \cos(T_0+d-u^2) du \times \int_{\sqrt{T_0+d_2}}^{\sqrt{T_0+d}} \cos(T_0+d-u^2) du \right\} \frac{dd}{\sqrt{T_0+d}} \\ &= 2 \times \int_{\sqrt{T_0+d_1}}^{\sqrt{T_0+d_2}} UC(d, d_1) \times UC(d, d_2) dx \end{aligned}$$

ここで $\sqrt{T_0+d}=x$ とある。

同様にして

$$\begin{aligned} TS(\beta_2, \beta_1, d_1, d_2) &= \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left\{ \int_{d_1}^d \frac{\sin(d-\theta)}{\sqrt{T_0+\theta}} d\theta \times \int_{d_2}^d \frac{\sin(d-\theta)}{\sqrt{T_0+\theta}} d\theta \right\} \frac{dd}{\sqrt{T_0+d}} \\ &= 2 \times \int_{\sqrt{T_0+d_1}}^{\sqrt{T_0+d_2}} US(d, d_1) \times US(d, d_2) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} WCC(\beta_2, \beta_1, d_1, d_2) &= \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left\{ \cos(d-d_1) \times \int_{d_2}^d \frac{\cos(d-\theta)}{\sqrt{T_0+\theta}} d\theta \right\} \frac{dd}{\sqrt{T_0+d}} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left\{ \cos(d-d_1) \times \int_{\sqrt{T_0+d_2}}^{\sqrt{T_0+d}} \cos(T_0+d-u^2) \right. \\ &\quad \left. \times 2 du \right\} \frac{dd}{\sqrt{T_0+d}} = 2 \times \int_{\sqrt{T_0+d_1}}^{\sqrt{T_0+d_2}} \cos(x^2-T_0-d_1) \times UC(d, d_2) dx \end{aligned}$$

同様にして

$$WCS(\beta_2, \beta_1, d_1, d_2) = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left\{ \cos(d-d_1) \times \int_{d_2}^d \frac{\sin(d-\theta)}{\sqrt{T_0+\theta}} d\theta \right\} \frac{dd}{\sqrt{T_0+d}} = 2 \times \int_{\sqrt{T_0+d_1}}^{\sqrt{T_0+d_2}} \cos(x^2-T_0-d_1) \times US(d, d_2) dx$$

$$WSC(\beta_2, \beta_1, d_1, d_2) = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left\{ \sin(d-d_1) \times \int_{d_2}^d \frac{\cos(d-\theta)}{\sqrt{T_0+\theta}} d\theta \right\} \frac{dd}{\sqrt{T_0+d}} = 2 \times \int_{\sqrt{T_0+d_1}}^{\sqrt{T_0+d_2}} \sin(x^2-T_0-d_1) \times UC(d, d_2) dx$$

$$WSS(\beta_2, \beta_1, d_1, d_2) = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left\{ \sin(d-d_1) \times \int_{d_2}^d \frac{\sin(d-\theta)}{\sqrt{T_0+\theta}} d\theta \right\} \frac{dd}{\sqrt{T_0+d}} = 2 \times \int_{\sqrt{T_0+d_1}}^{\sqrt{T_0+d_2}} \sin(x^2-T_0-d_1) \times US(d, d_2) dx$$

実際の計算にあたっては以上の各項の値は数値積分により求める。

(注) 断面の都合で全部記せなかったが f と之は $f_{HH}(f, w)$ は、

$$\begin{aligned} \bullet 0 \leq f \leq w \text{ の場合 } & -\frac{AH}{2EI} \times \frac{1}{UC(T_0, 0)^2} \times \{ UC(T_0, f) \times (\cos(T_0-w) \times TC(T_0, 0, 0) - UC(T_0, 0) \times WCC(T_0, \\ & w, w, 0)) - UC(T_0, 0) \times (\cos(T_0-w) \times TC(T_0, f, 0) - UC(T_0, 0) \times WCC(T_0, w, w, f)) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet w \leq f \leq T_1 \text{ の場合 } & -\frac{AH}{2EI} \times \frac{1}{UC(T_0, 0)^2} \times \{ UC(T_0, f) \times (\cos(T_0-w) \times TC(T_0, 0, 0) - UC(T_0, 0) \times WCC(T_0, \\ & w, w, 0)) - UC(T_0, 0) \times (\cos(T_0-w) \times TC(T_0, f, 0) - UC(T_0, 0) \times WCC(T_0, f, w, f)) \} \end{aligned}$$

となり β_{HP} と明らかに相反法則に成立している。他の場合も同様である。

(6) クロソイドのパラメーターAについて クロソイド曲線の相似性から当然の結果であるが

単位クロソイド曲線 ($A=1$) の場合のみの諸値を

計算しておけば 右の表の係数を乗じて求めるクロソイド曲線の断面力・変形を得ることができる。

クロソイド部材を捷角法で解いたものか文献(2)(4)

	ϕ_p	M_p	T_p	ϕ_H	M_H	T_H	ϕ_T	M_T	T_T
乗数	1	A	A	1/A	1	1	1/A	1	1
	f_p	β_p	θ_p	f_H	β_H	θ_H	f_T	β_T	θ_T
乗数	A^3	A^2	A^2	A^2	A	A	A^2	A	A

(5)にあるので茲に参照されたい。

終りに本文作成にあたり種々のご指導をいただいた北海道大学の渡辺教授並びに横濱市立大学教授に深く感謝します。

(参考文献) (1)日本道路協会 クロソイドポケットブック 昭和43年8月15日発行 (2)山崎 太田 クロソイド部材の軸面内荷重に対するたわみ角式 九大工学集報 第38回 第2号 昭和40年6月 (3)渡辺昇著 曲線けたの理論と計算 昭和42年5月25日発行 (4)山崎 太田 入江 面に垂直な荷重をうけるクロソイド曲線材の立体捷角式 第18回土木学会年次学術講演会講演要旨 昭和38年 (5)山崎・太田・彦坂 クロソイド部材をもつ連続桁およびラーメンの立体解析 土木学会論文集 第142号 昭和42年6月 研究ノート