

金沢大学工学部 正会員 小野 一良
東京ガス株式会社 " " 高木 貞人

軌道が振動荷重を受けたときに軌道に生ずる応答を理論的に解くために従来多くの研究者によって採用された軌道模型は枕木、道床および路盤上部の重量がレールに平行する直線上に集中し、これがその全長にわたって強さ一定のばねによって支持されると仮定したものが多く、しかしこのような模型では路盤の下方に向う波動の存在が無視されるので実際の軌道の振動を解析するのに不十分であると考えられる。よって著者等は路盤の重量が下方に広く分布してこの中を振動の波が伝播することを考慮に入れて振動の解析を行い、これを試験軌道で行った測定結果に比較した。

この研究で採用した軌道模型を図-1 に示したが、レールの単位長さ当りの重量を m_1 とし、レールと枕木との間に挟まれた軌道パッドのばね定数を軌道の単位長さ当り Δ とする。またこの軌道パッドは変形の数値に比例する内部摩擦を持つとしてその係数を C とする。枕木およびこれを支持する道床の重量を軌道の単位長さ当りに換算した値を m_2 とする。以上の諸数値は片側レール当りの値とする。レール鋼のヤング係数を E とし、断面2次モーメントを I とし、レールのたわみを y とし、枕木および道床のたわみを w とし、道床が路盤から受ける反力を u とする。しかるときにはつぎの2式が成立する。

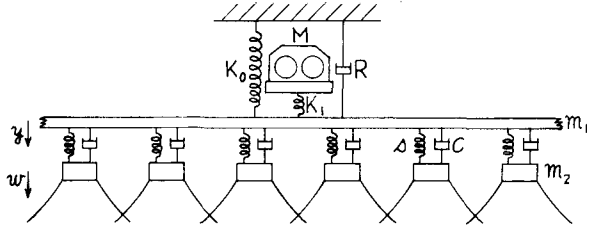


図-1 理論的計算において仮定した軌道の模型

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{m_1}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C \left(\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \Delta (y - w) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{m_2}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + C \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \Delta (w - y) + u = 0 \quad (2)$$

1本の枕木から道床に伝えられる圧力は道床中で B_0 なる面積に拡大分布し、さらにこの圧力は深さ z なる路盤中において B なる面積に拡大分布する。この拡大の形状が次式によって示されると仮定する。

$$B = B_0 \exp(2\varphi z) \quad (3)$$

ここに φ は路盤の材料によって定まる係数とする。いま深さ z における路盤のたわみを w とし、この深さの路盤内の圧力を p とし、路盤の圧縮に対する弾性係数を k とし、路盤の変形に対する内部摩擦を变形の速度に比例すると

仮定してその係数を n とする。しかるときには次式が成立する。

$$p = -k \frac{\partial w}{\partial z} - n \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} \quad (4)$$

枕木間隔を a とするとき (2) 式における u は $z=0$ における p を用いて次式のごとくあらわすことができる。

$$u = p \frac{B_0}{2a} \quad (5)$$

路盤の単位体積重量を ρ とし路盤の幅の方向における圧力が一定であると仮定すれば次式が導

かれる。

$$B\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -g \frac{\partial}{\partial z} (B\rho) \quad (6)$$

(3) および (4) 式を (6) 式に代入すれば w に関する次の微分方程式が得られる。

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = g \left(2\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(k \frac{\partial w}{\partial z} + \tau \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} \right) \quad (7)$$

上式を解くために w をつぎのように置く。

$$w = w_0 \exp(\lambda x + \mu z + \nu t) \quad (8)$$

(8) 式を (7) 式に代入すれば次式が得られる。

$$\rho \nu^2 = g(2\varphi + \mu)(k + \tau \nu) \mu \quad (9)$$

ν の値が与えられている場合には上式より μ を解けば

$$\mu = -\varphi \pm \sqrt{\varphi^2 + \frac{\rho \nu^2}{g(k + \tau \nu)}} \quad (10)$$

一般に (10) 式よりは μ として 2 個の値が定まるが、路盤中に含まれる振動および変形のエネルギーが有限値を採ると言う条件より $\mu + \varphi$ の実数部は負となることが要求される。

レールのたわみを

$$y = y_0 \exp(\lambda x + \nu t) \quad (11)$$

と置き、かつ枕木下における道床の圧縮ひずみを無視すれば (1), (2) 式に含まれる w は (8) 式において $z=0$ と置いた値に一致するはずであるからこれらの式より次式が導かれる。

$$\begin{aligned} EI \lambda^4 y_0 + \frac{m_1}{g} \nu^2 y_0 + C \nu (y_0 - w_0) + S (y_0 - w_0) &= 0 \\ \frac{m_2}{g} \nu^2 w_0 + C \nu (w_0 - y_0) + S (w_0 - y_0) & \\ - \frac{B_0}{2a} \mu (k + \tau \nu) w_0 &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

(12) および (13) 式が同時に成立すると言う条件より λ の値が 4 個求められ、これを $\lambda_0, i\lambda_0, -i\lambda_0, -\lambda_0$ とする。ただし λ_0 は第 1 象限にある数値とする。軌道の長さを無限と見なして $x \rightarrow \infty$ となるとき y および w が 0 に収束することを考慮すれば $x > 0$ に対して次

式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} y &= (y_2 e^{i\lambda_0 x} + y_3 e^{-i\lambda_0 x}) e^{\nu t} \\ w &= (w_2 e^{i\lambda_0 x} + w_3 e^{-i\lambda_0 x}) e^{\mu z + \nu t} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここに y_2 および y_3 は積分定数であって y_2, y_3 が決まれば (12) または (13) 式によって w_2 および w_3 が決定される。振動発生機は試験軌道の上にはりを渡してその上に取付けられているが、そのはりのたわみに関するばね定数を K_1 とする。試験軌道には実際の軌道に等しい条件で荷重を加えるため振動発生機と同一地点においてコイルばねまたは重ね板ばねを通してジャッキで圧力をかけたが、このばねのばね定数を K_0 とし、このばねの伸縮に伴って生ずる内部摩擦を伸縮の速度に比例すると仮定してその大きさを単位速度当り R とする。ただしここに K_1, K_0, R は片側レール当りの値とする。振動発生機の下方向へ向う移動量を $Y = Y_0 \exp(\nu t)$ (15)

とし、振動発生機的作用点を $x=0$ に選べばこの点で次式の成立することが要求される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= 0, \\ 2EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} &= K_1(Y - y) - K_0 y - R \frac{\partial y}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

振動発生機は 2 個ずつの偏心荷重をつけた 2 枚の円板が反対方向に回転することによって起振力を発生するのであるが、1 個の偏心荷重の重量と偏心量との積を g とし、1 枚の円板につけられた 2 個の偏心荷重が相対する位置より外れた角を α とし、毎分の回転数を n とすれば片側レールに加わる起振力 F は次式によって計算される。

$$F = \frac{2g}{g} \left(\frac{2\pi n}{60} \right)^2 \sin \frac{\alpha}{2} \quad (17)$$

振動発生機自体の重量を ZM とすれば

$$\frac{M}{g} \frac{d^2 Y}{dt^2} = K_1(y - Y) + F \exp\left(\frac{2\pi n}{60} i t\right) \quad (18)$$

(16), (18) 式に (14), (15) 式を代入すれば

$$\nu = i \frac{2\pi n}{60} \quad (19)$$

となることが要求され、かつ y_2 , y_3 および Y の値が決定される。

振動発生機によって試験軌道に種々の周波数の振動力を加え、そのとき試験軌道の各箇所に生ずる振動振幅その他を測定したが、振動発生機の直下において枕木に生ずる振動振幅と振動発生機の回転数との関係を図-2 に示した。このときの実験条件に一致するように次の諸数値を用いて上記の計算方法に従って振動振幅と回転数との関係を求め、その結果を図-3 に示した。

$E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $I=1744 \text{ cm}^4$, $m_1=0.5 \text{ kg/cm}$, $m_2=12 \text{ kg/cm}$, $C=0.1 \text{ kg} \cdot \text{sec/cm}^2$, $\Delta=750 \text{ kg/cm}^2$, $\tau=0.25 \text{ kg} \cdot \text{sec/cm}^2$, $k=350 \text{ kg/cm}^2$, $B_0=55 \times 240 \text{ cm}^2$, $a=66 \text{ cm}$, $g=0.009 \text{ cm}^{-1}$, $p=0.0018 \text{ kg/cm}^3$, $M=925 \text{ kg}$, $K_1=80,000 \text{ kg/cm}$, $K_0=1660 \text{ kg/cm}$, $R=0, 100, 200 \text{ kg} \cdot \text{sec/cm}^2$, $q=73 \text{ kg} \cdot \text{cm}$, $\alpha=10^\circ$. ここに $R=0$ はコイルばねの場合であり、このときには 1230 と 2410 r.p.m. に共振点があることが認められる。 $R=100$ および 200 は重ね板ばねを使用した場合であるが、 $R=0$ の場合に比べて共振点はほとんど変わらない。 $R=0$ の場合を図-2 に比較すれば共振周波数はほぼ一致することが認められる。第1の共振点は主として地盤の弾性係数に支配されるのでこれを適当に仮定することによって測定結果に一致させたのであるが、第2の共振点が測定結果にほぼ一致したことははなはだ興味のあることである。計算値に比べて実験より得た振幅が $1/2$ 程度となっている。この理由として計算においては振動発生機の起振力は軌道の1点に作用するとして振動振幅を求めたのであるが、実験においては約 70 cm 離れた2本のはりの上に振動発生機を置いたので起振力が2箇所に分散して作用したためと考えられる。

重ね板ばねを使用した場合には計算上振幅が著るしく減少することになるが、実験ではコイルばねの場合に比べてほとんど差がなかった。振幅が 0.1 mm 以下では重ね板ばねの摩擦抵抗はほとんど作用しないためと考えられる。図-3 には 3000 r.p.m. までの計算結果を示したが、さらに高い周波数における共振点の存在を調べた結果を図-4 に示した。この図によれば 14,500 r.p.m. 付近に第3の共振点が存在することが認められる。

軌道パッドのはね定数を種々変化して計算した結果によれば第3の共振点はこの値によって大きく変化することが判明した。また K_1 すなわち振動発生機を軌道に取付けるはりのはね定数を種々変化して計算した結果によれば K_1 が小さくなれば第2の共振点の存在は不明となり、また K_1 が大きくなれば第3の共振周波数は段々大きくなる。したがって第2, 第3の共振点ははなはだ不安定であ

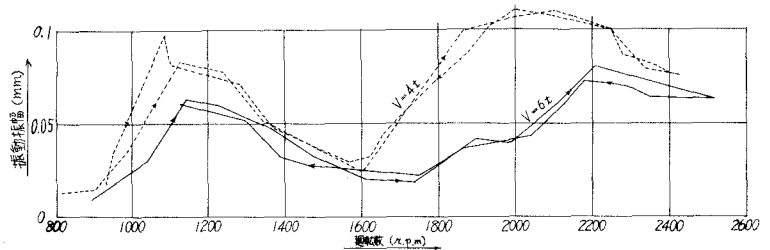


図-2 試験軌道中央部の枕木に生ずる振動振幅 (実験値)

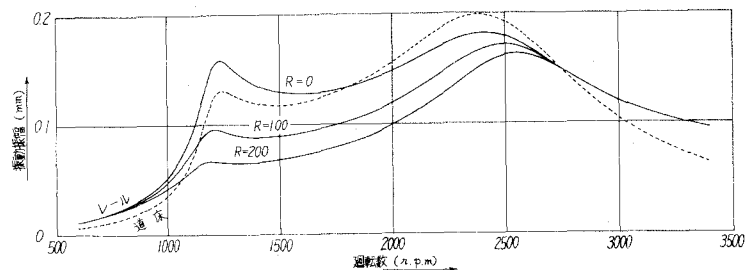


図-3 レールおよび道床に生ずる振動振幅 (計算値)

ることが判明した。

試験軌道の各の枕木間中央においてレール底部にワイヤーストレインゲージを貼り付けてレールに生ずる曲げ応力を測定したが、振動発生機による起振力が下向きの最大値に達してより各處に生ずる曲げ

モーメントが最大となるまでの時間を測定した結果を図-5に示した。振動発生機より遠ざかるにつれて位相のずれが大きくなることが認められる。理論計算よりレールの各箇所においてレールに生ずるたわみに関する位相のずれを求めた結果を図-6に示し、曲げモーメントに関する位相のずれを求めた結果を図-7に示した。低い回転数においては図-6と図-7に示す位相のずれは大きな差があるが、回転数の増加とともに次第に近くなり、2,000 r.p.m. 以上となれば測定結果にほぼ一致

することが認められる。

以上に述べたごとく路盤内に振動の波が伝播することを考慮に入れて計算を行うことによって試験軌道における測定結果をほぼ説明することができた。実際の軌道において列車通過時に軌道に生ずる振動を測定したところによれば80 %sec程度の基本振動と500 %sec

以上の高周波とが観察され

るが、前者は主として路盤

の弾性に支配される振動であり、後者は軌道の上部構造の弾性によって生ずる振動であることが推定される。

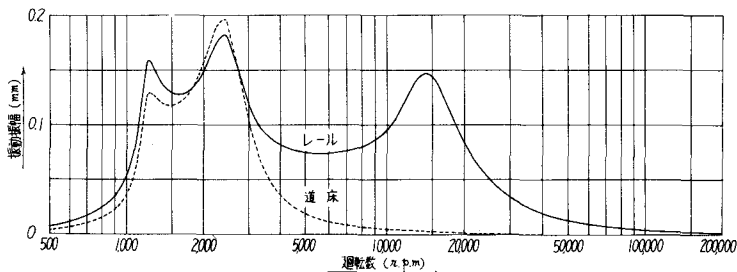


図-4 レールおよび道床に生ずる振動振幅 (計算値)

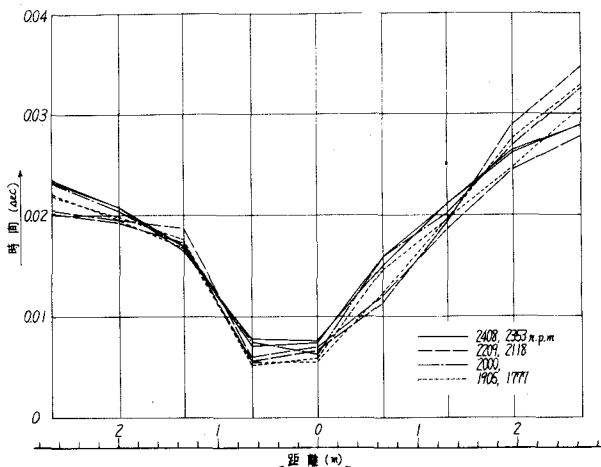


図-5 レールの曲げモーメントに関する位相のずれ (実験値)

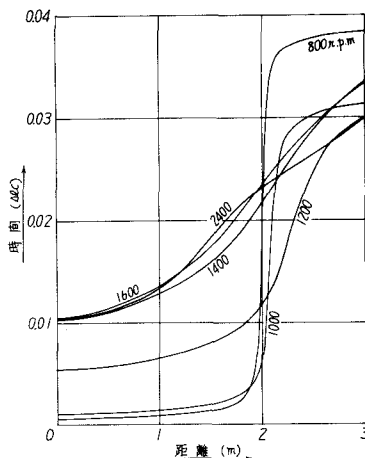


図-6 レールのたわみに関する位相のずれ (計算値)

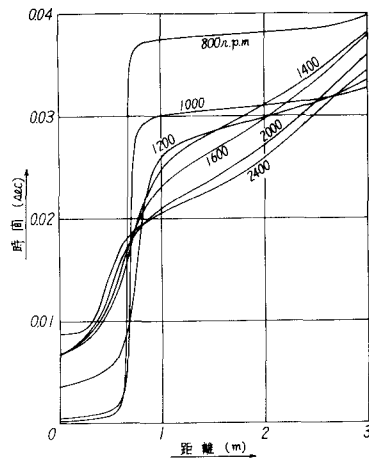


図-7 レールの曲げモーメントに関する位相のずれ (計算値)