Ⅳ-87　　　　交通量分布解析の統計力学的接近

名古屋工業大学　正員　松井寛

1. まえがき　各ゾーンの発生集中交通量を与えてOD交通量を求める確率論的方法を論じた優れた研究がすでに発表されているが[1]本文では与えられた道路ネット上の車のトリップの分布状態を、統計力学的なアプローチによって解析する方法を論じるもので、ODの推定と共に各ODペアに対していくつかの経路を指定することによって、各経路への交通量配分を同時に推定しようと試みるものである。

2. 理論　与えられた道路ネット内に r 個の交通発生源と s 個の交通吸収源があって、各車はそれぞれある交通発生源を出発地(O)に、ある交通吸収源を目的地(D)に選んで、道路ネット内を運行する状態を考える。各ODペアに対して道路ネット内で一般にいくつかの経路が選択できるが、一応各ODペアに対して、交通費用(所要時間、走行費用など)の小さい順にたかだか K 本までの経路を考えることにする。さて当該道路ネット上にNトリップの交通が分布する状態を考える。Nトリップのうち発生源 i ($i=1,2\cdots r$)から出発するトリップ数を N_i、このうち吸収源 j ($j=1,2\cdots s$)に向うものを N_{ij} で表わす。また N_{ij} のうち経路 k ($k=1,2\cdots K$)を選択するものを N_{ij}^k で表わすと、これらの間には $N=\sum_i^r N_i=\sum_i^r\sum_j^s N_{ij}=\sum_i^r\sum_j^s\sum_k^K N_{ij}^k$ の関係が満されているはずである。つぎに各発生源と吸収源の相対的な交通発生力、交通吸収力をそれぞれ U_i、V_j で表わし、また発生源 i を出発した車が吸収源 j に向う割合を P_{ij}、$i-j$ 間の交通のうち経路 k を選ぶ割合を P_k で表わせば、Nが十分大きい値を取るとき、これらの間には、

$$N_{ij}^k=N_{ij}P_k=N_iP_{ij}P_k=NU_iP_{ij}P_k \quad\cdots(1)$$

$$\sum_k^K P_k=1\cdots(2)\qquad \sum_j^s P_{ij}=1\cdots(3)\qquad \sum_i^r U_i=1\cdots(4)\qquad \sum_j^r V_j=1\cdots(5)\qquad \sum_i^r U_iP_{ij}=V_j\cdots(6)$$

が成立する。ところで $i-j$ 間ODで経路 k を選択することによって費やす交通費用を t_{ij}^k で表わせば、当該ネット内にNトリップの交通がODと経路の組合わせのそれぞれに N_{ij}^k トリップずつ分布する状態を考えると、Nトリップによる総交通費用は $\sum_i\sum_j\sum_k N_{ij}^k t_{ij}^k=N\sum_i\sum_j\sum_k U_iP_{ij}P_k t_{ij}^k=E$ となる。さてNトリップが総交通費用Eを共有する分布状態は、NとEが十分大きい値を取るとき、一般にはこの他にも沢山存在する。上に示したのは任意の総交通費用E(任意であるが一度選べば固定する)がNトリップに配分される可能な分布状態の1つを指定したことになるのである。つぎにあるEに対してこの関係を満たす N_{ij}^k の組合わせの数の総数は

$$W_N(E)=(E+N-1)!/(N-1)!E! \quad\cdots\cdots(7)$$

で表わされる数だけある。ただしEの値として整数値をとるように単位を決めるものとする。つぎにEが変化した場合の $W_N(E)$ の変化を考える。すなわちEが変化して $E+\Delta E$ となれば、このときの組合わせの数は、

$$W_N(E+\Delta E)=(E+\Delta E+N-1)!/(N-1)!(E+\Delta E)! \quad\cdots\cdots(8)$$

いま(8)式と(7)式の比をとると、

$$W_N(E+\Delta E)/W_N(E)=(E+\Delta E+N-1)!(N-1)!E!/(N-1)!(E+\Delta E)!(E+N-1)!$$

$$=(E+N)(1+N/(E+1))(1+N/(E+2))\cdots(1+N/(E+\Delta E-1))/(E+\Delta E)$$

となるが、$N\gg1$、$E\gg\Delta E$ としてEおよびE+Nに比べて ΔE を省略すれば、

$$W_N(E+\Delta E)/W_N(E) = (1+N/E)^{\Delta E} = (1+1/m)^{\Delta E}$$

ここで $E/N=m$ とおいた。さらに上式で両辺の対数をとれば、

$$\log W_N(E+\Delta E)-\log W_N(E) = \Delta E \log(1+1/m) \quad \Rightarrow \quad \Delta \log W_N(E) = \gamma \Delta E \quad \cdots (9)$$

ただし $\gamma=\log(1+1/m)$。つぎに見方を変えて総交通費用を共有するNトリップの交通が、それぞれ N_{ij}^k トリップ各ODと経路の組に配分されたとする。この配分の仕方の数 ω は、一般に $\omega = N!/\prod_{ijk} N_{ij}^k!$ で表わされる。ただし N_{ij}^k の組は $\sum_i\sum_j\sum_k N_{ij}^k t_{ij}^k = E$ を満足するものでなければならない。さて ω の最大値をWで表わすと、統計力学では一般にWが前述の $W_N(E)$ との間につぎの関係が成立することが証明されている。[2]

$$W_N(E+\Delta E)/W_N(E) = W_{E+\Delta E}/W_E \quad \cdots (10)$$

したがって(9)式と(10)式から $\Delta \log W_N(E) = \Delta \log W = \gamma \Delta E$ が成立し

$$\gamma\Delta E - \Delta \log \omega = \Delta \log W - \Delta \log \omega \quad \Rightarrow \quad \Delta(\gamma E - \log \omega) = \Delta(\log W - \log \omega) \geq 0 \quad \cdots (11)$$

よって $\min(\gamma E - \log \omega)$ あるいは $\max(\log \omega - \gamma E)$ が確率的に最も起り易い分布パターンを与える式で、統計力学での平衡条件を与える特性函数(ヘルムホルツの自由エネルギー)に対応している。交通量分布の問題に対しては、$\max(\log \omega - \gamma E) = \max\left(-\sum_i U_i \log U_i - \sum_i\sum_j U_i P_{ij} \log P_{ij} - \sum_i\sum_j\sum_k U_i P_{ij} P_k \log P_k - \gamma \sum_i\sum_j\sum_k U_i P_{ij} \overset{P_k}{\vee} t_{ij}^k\right)$ を条件式(2)〜(6)のもとで解けばよい。なお上式ではスターリングの公式が使われ、さらに常数が省かれている。各ゾーンの発生集中交通量が与えられる場合にOD交通量と各経路への配分交通量を求めるには、ラグランジェ乗数 λ_{ij}, μ_i, φ_j を用いて次式を最大化すればよい。

$$R \equiv -\sum_i\sum_j U_i P_{ij}\log P_{ij} - \sum_i\sum_j\sum_k U_i P_{ij} P_k \log P_k - \gamma \sum_i\sum_j\sum_k U_i P_{ij} P_k t_{ij}^k + \sum_i\sum_j \lambda_{ij}(P_k - 1) + \sum_i \mu_i\left(\sum_j P_{ij} - 1\right) + \sum_j \varphi_j\left(\sum_i U_i P_{ij} - V_j\right)$$

$\partial R/\partial P_k = 0$, $\partial R/\partial P_{ij} = 0$, $\partial R/\partial \lambda_{ij} = 0$, $\partial R/\partial \mu_i = 0$, $\partial R/\partial \varphi_j = 0$ から得られる連立方程式から、

$$P_k = e^{-\gamma t_{ij}^k} \Big/ \sum_k e^{-\gamma t_{ij}^k} \quad \cdots (12) \qquad P_{ij} = \alpha_i \beta_j e^{-1-\sum_k P_k \log P_k - \gamma \sum_k P_k t_{ij}^k} \quad \cdots (13)$$

ただし、

$$\alpha_i = e \Big/ \sum_j \beta_j e^{-\sum_k P_k \log P_k - \gamma \sum_k P_k t_{ij}^k} \quad \cdots (14) \qquad \beta_j = e V_j \Big/ \sum_i U_i \alpha_i e^{-\sum_k P_k \log P_k - \gamma \sum_k P_k t_{ij}^k} \quad \cdots (15)$$

なお上式で t_{ij}^k は一般には交通量の函数とみなされるが、本文では一応 t_{ij}^k は一定値をとると仮定して、$\partial t_{ij}^k/\partial P_k = \partial t_{ij}^k/\partial P_{ij} = 0$ とした。P_{ij} の値を求めるには収束計算によらねばならない。その手順は、1) 適当に仮定した γ の値を(12)式に代入して P_k を求める。2) この P_k と仮定した β_j の値を用いて式(14)から α_i を求める。3) 求めた α_i を式(15)に代入して再び β_j を求める。4) 手順2)〜3)をくり返して α_i, β_j が一定値に収束するまで計算する。5) 収束した α_i, β_j の値を式(13)に代入すると P_{ij} が求まる。

OD交通量がデータとして与えられるときに各経路への配分交通量を求める問題に対しては、ラグランジェ函数は、$R \equiv -\sum_i\sum_j\sum_k U_i P_{ij} P_k \log P_k - \gamma \sum_i\sum_j\sum_k U_i P_{ij} P_k t_{ij}^k + \sum_i\sum_j \lambda_{ij}(P_k - 1)$ となり P_k の解として、上記の式(12)が得られる。

3. あとがき　適用例として名古屋市14区に対して、各区を結ぶ仮想的なネットを考えて乗用車の区間ODと配分を計算したところ、ODについては実績値にかなり近い結果が得られたが、区間の断面交通量の実績データがないので、配分結果については検討できなかった。なおこのときの t_{ij}^k として区間距離(km)をとり、$\gamma=0.25$ で計算を行なった。今後の課題としては、上の議論では容量の制約が考慮されていないので今後検討するとともに、t_{ij}^k をどのような形で評価すればよいかさらに研究を進めたい。

1) 佐佐木　綱「トリップのOD分布を求める確率論的方法」交通工学 Vol.2 No.6 1967

2) R.W. Gurney　山本常信訳「統計力学序論」吉岡書店