III−131　シールドテール部スキンプレートの設計方法について

熊谷組技術研究所　正員　藤本　徹

(1) Zerna の解法による近似解

シールドテール部に作用する土荷重として次のものを考える。これは図－1(a)，(b)の場合を加え合

$$Z = P_0 + P_2 \cos 2\varphi \qquad (1)$$

わせて(c)のようなほぼ実現場における同様な荷重状態をあたえる。

また，この荷重分布はシールドの長手方向には一定とする。この荷重状態に対してシールドテール部は図－2に示すような一端固定，他端自由の円筒殻であるからこれを解けばよい。殻には減衰の急な曲げ理論と変化のゆるやかな膜理論の解とからなり，前者は余関数，後者は特解である。したがって両者の和が一般解である。

いま(1)式右辺第一項に対する膜理論として

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi^{m_0} &= -P_0 a \\ N_{x\varphi}^{m_0} &= N_{\varphi x}^{m_0} = C_1(\varphi) \\ N_x^{m_0} &= -\frac{\partial C_1(\varphi)}{\partial \varphi}\xi + C_2(\varphi) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} U^{m_0} &= -\frac{a^2}{Et}\{\upsilon P_0 \xi + \frac{1}{a} C_3^0(\varphi)\} \\ V^{m_0} &= \frac{a}{Et}\{\frac{\partial C_3^0(\varphi)}{\partial \varphi}\xi - C_4^0(\varphi)\} \\ W^{m_0} &= \frac{a^2}{Et}[P_0 + \frac{1}{a}\{\frac{\partial^2 C_3^0(\varphi)}{\partial \varphi^2}\xi - \frac{\partial C_4^0(\varphi)}{\partial \varphi}\}] \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

右辺第二項に対する膜理論として

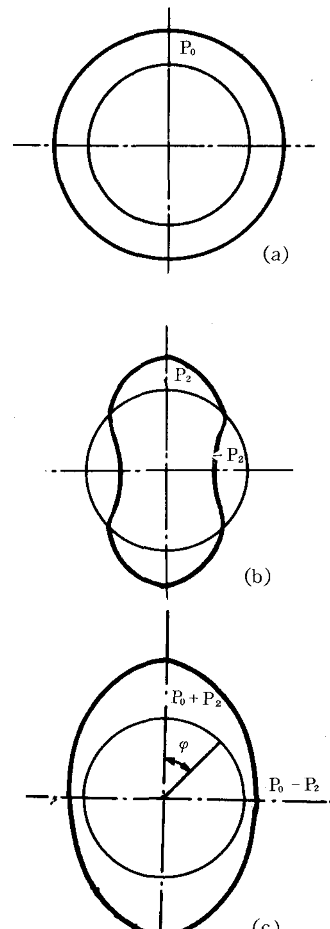
$$\left.\begin{aligned} N_\varphi^{m^2} &= -a P_2 \cos 2\varphi \\ N_{x\varphi}^{m^2} &= 2P_2 a \sin 2\varphi \xi + C_1^2(\varphi) \\ N_x^{m^2} &= -2P_2 a \cos 2\varphi \xi^2 - \frac{\partial C_1^2(\varphi)}{\partial \varphi}\xi + C_2^2(\varphi) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} U^{m^2} &= \frac{a^2}{Et}\{\frac{2}{3}P_2 \xi^3 + \upsilon P_2 \xi + \frac{1}{a} C_3^2(\varphi)\}\cos 2\varphi \\ V^{m^2} &= \frac{a^2}{Et}[\frac{P_2}{3}\xi^4 - (2+\upsilon)P_2 \xi^2 + \frac{1}{a}\{\frac{\partial C_3^2(\varphi)}{\partial \varphi}\xi - C_4^2(\varphi)\}]\sin 2\varphi \\ W^{m^2} &= \frac{a}{Et}[\frac{2}{3}P_2 \xi^4 - 4P_2 \xi^2 + P_2 + \frac{1}{a}\{\frac{\partial^2 C_3^2(\varphi)}{\partial \varphi^2}\xi - \frac{\partial C_4^2(\varphi)}{\partial \varphi}\}]\cos 2\varphi \end{aligned} \qquad (5)$$

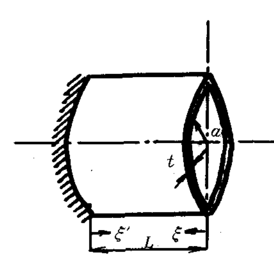
但し $\xi = 0$ にて $N_{x\varphi} = N_x = 0$

$$C_1^0(\varphi) = C_2^0(\varphi) = C_1^2(\varphi) = C_2^2(\varphi) = 0 \qquad (6)$$

次に曲げ理論は Zerna によって次のごとく撓み W，ポテンシアル ϕ が求められている。基本式は



図－1



図－2

$$\left(a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 \psi + i \frac{a^3}{t} \sqrt{12(1-\upsilon^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \tag{7}$$

ここに　$\psi = W + i \dfrac{\sqrt{12(1-\upsilon^2)}}{Et^2} \phi$

ここでψの解を次のごとくおく

$$\psi = e^{m\frac{x}{a}} \cos n\varphi \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} m_{\frac{1}{3}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[k + \sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 + k^4}} + i \left(k + \sqrt{-n^2 + \sqrt{n^4 + k^4}} \right) \right] \\ m_{\frac{2}{4}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[k - \sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 + k^4}} - i \left(k - \sqrt{-n^2 - \sqrt{-n^2 + k^4}} \right) \right] \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$k^2 = \frac{1}{2} \frac{a}{t} \sqrt{3(1-\upsilon^2)}$$

m_2，m_4から減衰のゆるやかな膜理論が求まるがここではこの解は用いず m_1，m_3 のみを用いる。

$$\xi = \frac{x}{a} \qquad \xi' = \frac{x'}{a} \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[k + \sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 + k^4}} \right] \qquad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[k + \sqrt{-n^2 + \sqrt{n^4 + k^4}} \right]$$

とおいて(8)式は結局

$$\left.\begin{aligned} W^B &= \frac{a^2}{Et^2} \sqrt{12(1-\upsilon^2)} \left[e^{-\alpha\xi'} (D_1 \cos\beta\xi' - D_2 \sin\beta\xi') + e^{-\alpha\xi} (D_3 \cos\beta\xi - D_4 \sin\beta\xi) \right] \cos n\varphi \\ \phi^B &= a^2 \left[e^{-\alpha\xi'} (D_2 \cos\beta\xi' + D_1 \sin\beta\xi') + e^{-\alpha\xi} (D_4 \cos\beta\xi + D_3 \sin\beta\xi) \right] \cos 2\varphi \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

これより以下各々の断面諸量が誘導される。

$$U^B = \frac{a}{Et} \Big[-n^2 e^{-\alpha\xi'} (D_2^{-1} \cos\beta\xi' + D_1^{-1} \sin\beta\xi') - \upsilon e^{-\alpha\xi'} (D_2^1 \cos\beta\xi + D_1^1 \sin\beta\xi')$$
$$- n^2 e^{-\alpha\xi} (D_4^1 \cos\beta\xi + D_3^1 \sin\beta\xi) - \upsilon e^{-\alpha\xi} (D_4^1 \cos\beta\xi + D_3^1 \sin\beta\xi) \Big] \cos n\varphi$$

$$V^B = \frac{a}{Et} \frac{1}{n} \Big[e^{-\alpha\xi'} (D_2^2 \cos\beta\xi' + D_1^2 \sin\beta\xi') + \upsilon n^2 e^{-\alpha\xi'} (D_2 \cos\beta\xi' + D_1 \sin\beta\xi')$$
$$+ \frac{t}{a} \sqrt{12(1-\upsilon^2)}\, e^{-\alpha\xi'} (D_1 \cos\beta\xi' - D_2 \sin\beta\xi')$$
$$+ e^{-\alpha\xi} (D_4^2 \cos\beta\xi + D_3^2 \sin\beta\xi) + \upsilon n^2 e^{-\alpha\xi} (D_4 \cos\beta\xi + D_3 \sin\beta\xi)$$
$$+ \frac{t}{a} \sqrt{12(1-\upsilon^2)}\, e^{-\alpha\xi} (D_3 \cos\beta\xi - D_4 \sin\beta\xi) \Big] \sin n\varphi$$

ここに $n=0$ のとき $V^B = 0$

$$N_\varphi^B = \left[e^{-\alpha\xi'} (D_2^2 \cos\beta\xi' + D_1^2 \sin\beta\xi') + e^{-\alpha\xi} (D_4^2 \cos\beta\xi + D_3^2 \sin\beta\xi) \right] \cos n\varphi$$

$$N_x^B = n^2 \left[e^{-\alpha\xi} (D_2 \cos\beta\xi' + D_1 \sin\beta\xi') + e^{-\alpha\xi} (D_4 \cos\beta\xi + D_3 \sin\beta\xi) \right] \cos n\varphi$$

$$N_{x\varphi}^B = N_{\varphi x}^B = n \left[e^{-\alpha\xi} (D_2^1 \cos\beta\xi' + D_1^1 \sin\beta\xi') + e^{-\alpha\xi} (D_4^1 \cos\beta\xi + D_3^1 \sin\beta) \right] \sin n\varphi$$

$$M_x = \frac{t}{\sqrt{12(1-\upsilon^2)}} \Big[e^{-\alpha\xi'} (D_1^2 \cos\beta\xi' - D_2^2 \sin\beta\xi') - \upsilon n^2 e^{-\alpha\xi'} (D_1 \cos\beta\xi' - D_2 \sin\beta\xi')$$
$$+ e^{-\alpha\xi} (D_3^2 \cos\beta\xi - D_4^2 \sin\beta\xi) - \upsilon n^2 e^{-\alpha\xi} (D_3 \cos\beta\xi - D_4 \sin\beta\xi) \Big] \cos n\varphi$$

$$M_\varphi = \frac{t}{\sqrt{12(1-\upsilon^2)}} \Big[-n^2 e^{-\alpha\xi'} (D_1 \cos\beta\xi' - D_2 \sin\beta\xi') + \upsilon e^{-\alpha\xi'} (D_1^2 \cos\beta\xi' - D_1^2 \sin\beta\xi')$$
$$- n^2 e^{-\alpha\xi} (D_3 \cos\beta\xi - D_4 \sin\beta\xi) + \upsilon e^{-\alpha\xi} (D_3^2 \cos\beta\xi - D_4^2 \sin\beta\xi) \Big] \cos n\varphi$$

$$M_{\varphi x} = M_{x\varphi} = -\frac{(1-\upsilon)t}{\sqrt{12(1-\upsilon^2)}} n \left[e^{-\alpha\xi'} (D_1^1 \cos\beta\xi' - D_2^1 \sin\beta\xi') + e^{-\alpha\xi} (D_3^1 \cos\beta\xi - D_4^1 \sin\beta\xi) \right] \sin n\varphi$$

$$Q_\varphi = -\frac{1}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}\left(\frac{t}{a}\right)\left[n^3 e^{-\alpha\xi'}(D_1\cos\beta\xi' - D_2\sin\beta\xi') - n e^{-\alpha\xi'}(D_1^2\cos\beta\xi' - D_2^2\sin\beta\xi')\right.$$
$$\left. + n^3 e^{-\alpha\xi'}(D_3\cos\beta\xi - D_4\sin\beta\xi) - n e^{-\alpha\xi}(D_3^2\cos\beta\xi - D_4^2\sin\beta\xi)\right]\sin n\varphi$$
$$Q_x = \frac{1}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}\left(\frac{t}{a}\right)\left[e^{-\alpha\xi'}(D_1^3\cos\beta\xi' - D_2^3\sin\beta\xi') - n^2 e^{-\alpha\xi'}(D_1^1\cos\beta\xi' - D_2^1\sin\beta\xi')\right.$$
$$\left. + e^{-\alpha\xi}(D_3^3\cos\beta\xi - D_4^3\sin\beta\xi) - n^2 e^{-\alpha\xi}(D_3^1\cos\beta\xi - D_4^1\sin\beta\xi)\right]\cos n\varphi \qquad \text{—— (11)}$$

ただし $D^n_{\frac{3}{1}}$，$D^n_{\frac{4}{2}}$はつぎに示す通りである。

$$D^n_{\frac{1}{3}} = \pm\alpha D^{n-1}_{\frac{1}{3}} \pm \beta D^{n-1}_{\frac{2}{4}} \qquad D^n_{\frac{2}{4}} = \pm\alpha D^{n-1}_{\frac{2}{4}} \mp \beta D^{n-1}_{\frac{1}{3}} \qquad D^0 = D$$
$$D^{-1}_{\frac{1}{3}} = \frac{\pm\alpha D_{\frac{1}{3}} \mp \beta D_{\frac{2}{4}}}{\alpha^2+\beta^2} \qquad D^{-1}_{\frac{2}{4}} = \frac{\pm\alpha D_{\frac{2}{4}} \pm \beta D_{\frac{1}{3}}}{\alpha^2+\beta^2} \qquad (12)$$

故に全ての常数は D_1 D_2 D_3 D_4 で表すことができる。なお，$n=0$，2，の場合が (1) 式の場合と対応するので $n=0$ の時と $n=2$ の時とを別々に解いて C，D 等を求め，断面諸量はこれらの和とする。

次に境界条件は

(1) 自由端において（$\xi=0$，$\xi'=\frac{L}{a}$）

$$M_x = 0 \qquad S_x = Q_x + \frac{\partial M_{x\varphi}}{a\partial\varphi} = 0 \qquad (13)$$

ここで D_3 D_4 を簡単に求めるには ξ'の項を無視して ξ の項のみをとればよい。

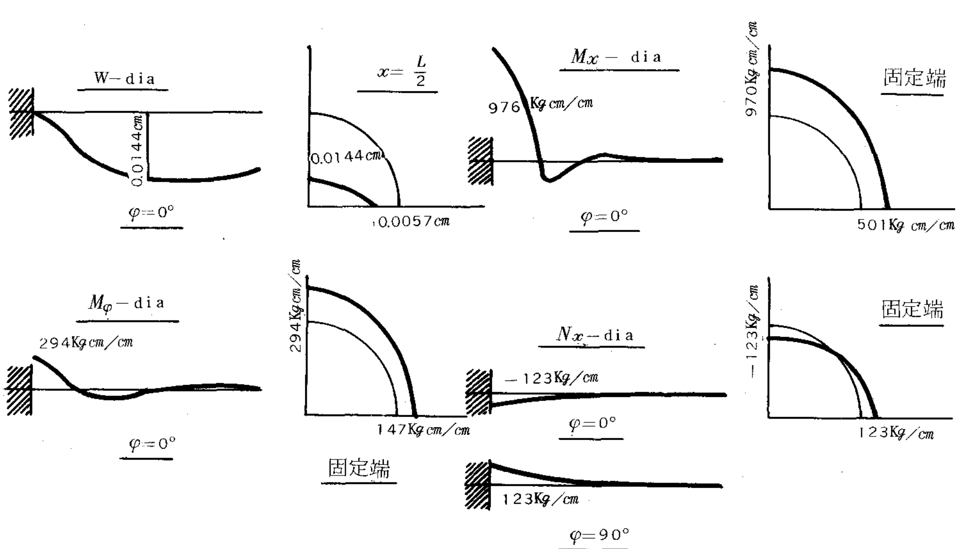
(2) 固定端において（$\xi'=0$，$\xi=\frac{L}{a}$）

$$W^B + W^m = 0,\quad U^B + U^m = 0,\quad V^B + V^m = 0,\quad \frac{\partial}{\partial\xi}(W^B + W^m) = 0 \qquad (14)$$

前と同様に ξ の項は無視し，ξ'の項のみを考え C_3^m C_4^m D_1 D_2 に対する連立方程式を解いて定める。

次に実計算例を示す。

$a=300$ cm　$t=6$ cm　$L=200$ cm　$E=2.1\times10^6$ kg/cm²　$\nu=3$　$K_0=0.5$　$P=1.8$ t/m³



図−3

(2) エネルギー法による殻座屈荷重の算定

殻の全エネルギーは次式で与えられる。

$$\Pi=\frac{1}{2}\int(N_x\varepsilon_x+N_\varphi\varepsilon_\varphi+N_{x\varphi}\gamma_{x\varphi})df+\frac{1}{2}\int(M_xK_x+M_\varphi K_\varphi+M_{x\varphi}K_{x\varphi})df$$
$$+\int q_\varphi\left[W+V\left(\frac{\partial W}{a\partial\varphi}+\frac{V}{a}\right)+U\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right]df=A+U \tag{15}$$

次に U_1 V_1 W_1 なる付加仮想変位を殻に与えて変位がそれぞれ次のごとく移行したときの殻の応力，

$$U=U_0+\alpha U_1 \qquad V=V_0+\alpha V_1 \qquad W=W_0+\alpha W_1 \tag{16}$$

歪度等が次式で与えられるものと仮定する。ここに U_0 V_0 W_0 N_{x_0} N_{φ_0} $N_{x\varphi_0}$ etcは前に解いた値を用

$$N_x=N_{x_0}+\alpha N_{x_1}+\alpha^2N_{x_2} \qquad \varepsilon_x=\varepsilon_{x_0}+\alpha\varepsilon_{x_1}+\alpha^2\varepsilon_{x_2} \qquad M_x=M_{x_0}+\alpha M_{x_1}+\alpha^2M_{x_2} \qquad K_x=K_{x_0}+\alpha K_{x_1}+\alpha^2K_{x_2} \tag{17}$$

いる。また W_1 は次式のごとく軸対称変形座屈の場合を考えて次のようにおく。

$$W_1=\sum_{n=1,2,3}(a_n\cos n\pi\varphi)\sin\left(\frac{\pi}{2\ell}\right)x \tag{18}$$

これより U_1 V_1 ε_{x_1} ε_{φ_1} $\gamma_{x\varphi_1}$ ε_{x_2} ε_{φ_2} $\gamma_{x\varphi_2}$ K_{x_1} K_{φ_1} $K_{x\varphi_1}$ K_{x_2} K_{φ_2} $K_{x\varphi_2}$ はそれぞれ誘導される。次に，殻の座屈荷重決定は第二位無限小変化量が必要であるから(15)式の第二位の無限小変化量は次のごとくである。

$$\Delta\Pi_2=\frac{Et}{2(1-\upsilon^2)}\int\left[(\varepsilon_{x_1})^2+(\varepsilon_{\varphi_1})^2+2\upsilon\varepsilon_{x_1}\varepsilon_{\varphi_1}+\frac{1-\upsilon}{2}(\gamma_{x\varphi_1})^2\right]df$$
$$+\frac{Et^3}{24(1-\upsilon^2)}\int\left[(K_{x_1})^2+(K_{\varphi_1})^2+2\upsilon K_{x_1}K_{\varphi_1}+2(1-\upsilon)(K_{x\varphi_1})^2\right]df$$
$$+\int[N_{x_0}\varepsilon_{x_2}+N_{\varphi_0}\varepsilon_{\varphi_2}+N_{x\varphi_0}\gamma_{x\varphi_2}]df+\int[M_{x_0}K_{x_2}+M_{\varphi_0}K_{\varphi_2}+M_{x\varphi_0}K_{x\varphi_2}]df$$
$$-\int q_\varphi\left[V_1\left(\frac{aW_1}{a\partial\varphi}+\frac{\partial V_1}{a}\right)+U_1\frac{\partial W_1}{\partial x}\right]df=\Delta A_2+\Delta U_2 \tag{19}$$

ここで座屈条件式は $\Delta\pi_2=0$ であるが(18)式のごとくおいたために境界条件を満足しないものが出てくる。ここで Lagrange 乗数 λ を導入すれば次式のごとくなり，これを極値ならしめるような a_n λ_1

$$\Delta\Pi_2=\Delta A_2+\Delta U_2-\lambda_1U_1-\lambda_2\frac{\partial W_1}{\partial\xi'} \tag{20}$$

λ_2 q を求めることができる。ここでえられた q の値が座屈荷重 q_{ck} である。なお，本研究は相当ぼう大な計算を必要とするため目下のところ実解析には至らないが近く完成の予定である。

主な参考文献は (1) 横尾義貫，松尾理，国枝治郎　「容器類の応力解析」
日本建築学会論文報告集　第63号　1959
(2) 津下一英　「屋根型円筒シェルの座屈」
日本建築学会論文報告集　第77号　1962
(3) Novozhilov V. V.「Foundation of Nonlinear Theory of Elasticity」Rochester, New York Greylock press 1953

なお，本研究に終始御指導頂いた京都大学村山朔郎教授，国枝治郎講師に御礼申上げる。