III−98

摩擦性塑性体とみなされる地山中の素掘円形トンネル周辺地山の弾塑性領域応力分布について

徳島大学工学部　正員　小田英一
同　工業短大　正員　山上拓男

1. まえがき

水平な地表面を有する地山が、土のような摩擦性塑性体で、等方等質性であり、これに重力が作用しているとき、この半無限体の地山中に円形トンネルを掘削した際の、応力平衡条件式と降伏条件式とより、特性連立偏微分方程式を導き、物理面の特性曲線がすべり線となり、双曲型偏微分方程式をうる結果、塑性流動領域内の解は、トンネル周縁上の境界条件のみによって求められる。この方法を用いて、近似的逐次法により、トンネル周辺のすべり線の形状を明らかにし、これより応力分布を求め、さらに、H.Schmidtの理論を用いて、弾塑性境界の形、およびその大きさを決定した。

2. 特性連立偏微分方程式

図-1、図-2を参照して、P点における二次元的に考えた応力平衡条件式を、極座標で表すと

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{1}{r}(\sigma_r-\sigma_\theta)=-w\cos\theta,\quad \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}+2\frac{\tau_{r\theta}}{r}=w\sin\theta \qquad \cdots\cdots (1)$$

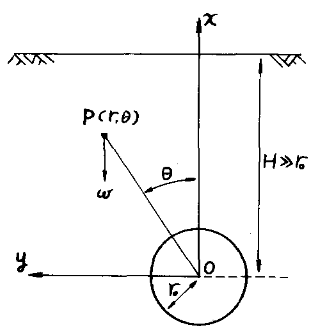

図-1

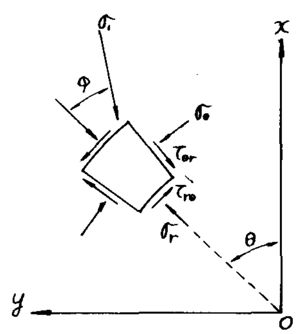

図-2

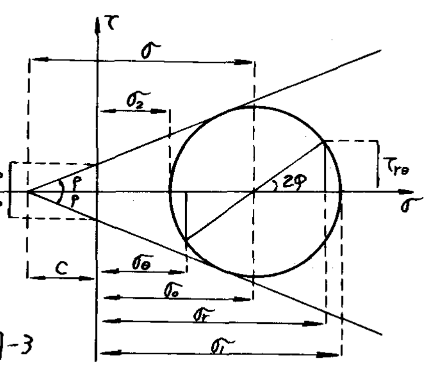

図-3

一方、降伏条件式は、図-3のモールの応力円より

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\sigma(1+\sin\rho\cdot\cos2\varphi)-c,\quad \sigma_\theta=\sigma(1-\sin\rho\cdot\cos2\varphi)-c\\ \tau_{r\theta}&=\sigma\cdot\sin\rho\cdot\sin2\varphi\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots(2)$$

ここに　φ：最大主応力方向と半径方向とのなす角（r,θの関数），　ρ：内部摩擦角

σ：図-3において　$c+\sigma$　（r,θの関数）

ここで、(2)式を(1)式に代入すると

$$\left.\begin{aligned}&(1+\sin\rho\cdot\cos2\varphi)\frac{\partial\sigma}{\partial r}+\frac{\sin\rho\cdot\sin2\varphi}{r}\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}-2\sigma\cdot\sin\rho\cdot\sin2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{2\sigma\cdot\sin\rho\cdot\cos2\varphi}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\\&\quad+\frac{2\sigma\cdot\sin\rho\cdot\cos2\varphi}{r}+w\cdot\cos\theta=0\\&\sin\rho\cdot\sin2\varphi\frac{\partial\sigma}{\partial r}+\frac{1-\sin\rho\cdot\cos2\varphi}{r}\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}+2\sigma\sin\rho\cdot\cos2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{2\sigma\sin\rho\cdot\sin2\varphi}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\\&\quad+\frac{2\sigma\sin\rho\cdot\sin2\varphi}{r}-w\cdot\sin\theta=0\end{aligned}\right\}\cdots(3)$$

なる連立偏微分方程式が与えられるが、特性曲線論によれば、上記の連立方程式を解くことは、次の特性連立偏微分方程式を解くことに帰せられる。ただし、式中のα、βは特性変数である。

$$
\left.
\begin{aligned}
&C_+\text{-曲線}: \quad \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} = \frac{1}{r}\cdot\tan\left\{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\varphi\right\}\frac{\partial r}{\partial\alpha}\\
&C_-\text{-曲線}: \quad \frac{\partial\theta}{\partial\beta} = \frac{1}{r}\cdot\tan\left\{-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\varphi\right\}\frac{\partial r}{\partial\beta}\\
&\Gamma_+\text{-曲線}: \quad \cos^2\rho\,\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}+\sigma\cdot\sin2\rho\,\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\left[2\sigma\sin\rho\cdot\sin2\varphi-r\cdot\omega\{\sin\theta+\sin\rho\times\right.\\
&\qquad \left.\sin(2\varphi+\theta)\}\right]\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}-\left[\frac{2\sigma\cdot\sin\rho}{r}\cdot(\sin\rho-\cos2\varphi)-\omega\{\cos\theta-\sin\rho\times\right.\\
&\qquad \left.\cos(2\varphi+\theta)\}\right]\frac{\partial r}{\partial\alpha}=0\\
&\Gamma_-\text{-曲線}: \quad \cos^2\rho\,\frac{\partial\sigma}{\partial\beta}-\sigma\cdot\sin2\rho\,\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+\left[2\sigma\cdot\sin\rho\cdot\sin2\varphi-r\omega\{\sin\theta+\sin\rho\times\right.\\
&\qquad \left.\sin(2\varphi+\theta)\}\right]\frac{\partial\theta}{\partial\beta}-\left[\frac{2\sigma\sin\rho}{r}\cdot(\sin\rho-\cos2\varphi)-\omega\{\cos\theta-\sin\rho\times\right.\\
&\qquad \left.\cos(2\varphi+\theta)\}\right]\frac{\partial r}{\partial\beta}=0
\end{aligned}
\right\} \text{-----(4)}
$$

上式の C_+-曲線、C_--曲線は物理面(r,θ)についての、α方向、β方向のすべり線を表わす。また、Γ_+-曲線、Γ_--曲線は応力面(σ,φ)についてのものであって、両者はそれぞれ相対応している。

3、近似的差分法による解法

円形トンネル周縁上では、任意の点において $\varphi = \pi/2$、$\sigma = -c\cdot\tan\rho\cdot\tan(\pi/4+\rho/2)+c$ (図-4参照)、という境界条件のもとに、C_+、C_-両曲線(すべり線)の交点の座標(r,θ)、およびその点での(σ,φ)の値を、(4)式を用いて近似的差分法によって求めるのであるが、図-5において、すべり線の交点である、M点、N点での各値が既知で、これを用いてMN点での値を求める場合につき、その結果のみを示すと、

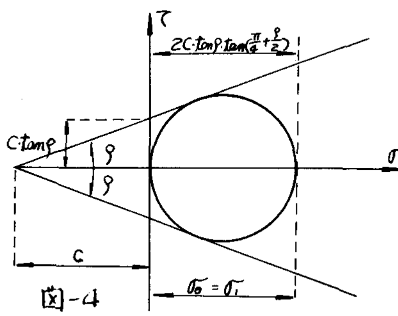

図-4

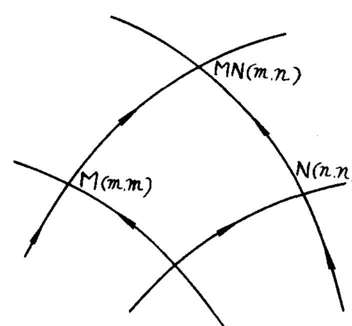

図 5

MN点での座標(r_{mn},θ_{mn})は

$$
r_{mn}=\frac{(G_2-G_1)\cdot\theta_{mn}+H_2-H_1}{F_1-F_2},\qquad \theta_{mn}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}
$$

ここに

$$
\begin{aligned}
&F_1=\frac{\theta_{mm}}{2}+\tan\left\{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\varphi_{mm}\right\},\qquad G_1=-\frac{r_{mm}}{2}\\
&F_2=\frac{\theta_{nn}}{2}+\tan\left\{-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\varphi_{nn}\right\},\qquad G_2=-\frac{r_{nn}}{2}\\
&H_1=r_{mm}\left[\frac{\theta_{mm}}{2}-\tan\left\{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\varphi_{mm}\right\}\right]\\
&H_2=r_{nn}\left[\frac{\theta_{nn}}{2}-\tan\left\{-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\rho}{2}\right)+\varphi_{nn}\right\}\right]\\
&A=-\frac{1}{2}(G_2-G_1)^2\\
&B=(F_1G_2-F_2G_1)\cdot(G_2-G_1)-\frac{1}{2}(G_2-G_1)\cdot(H_2-H_1),\quad C=(F_1G_2-F_2G_1)(H_2-H_1)+(H_1G_2-H_2G_1)(F_1-F_2)
\end{aligned}
$$

また、MN点での(σ_{mn},φ_{mn})は

$$
\sigma_{mn}=\frac{(R_2Q_1-R_1Q_2)\cdot\varphi_{mn}+S_2Q_1-S_1Q_2}{P_1Q_2-P_2Q_1},\qquad \varphi_{mn}=\frac{-E\pm\sqrt{E^2-4DF}}{2D}
$$

ここに

$$
\begin{aligned}
&P_1=\cos^2\rho-\frac{\sin2\rho}{2}\cdot\varphi_{mm}+\sin\rho\cdot\sin2\varphi_{mm}\cdot(\theta_{mn}-\theta_{mm})-\frac{2\sin\rho}{r_{mn}+r_{mm}}\cdot(\sin\rho-\cos2\varphi_{mm})\cdot(r_{mn}-r_{mm})\\
&Q_1=\frac{\sin2\rho}{2},\quad R_1=\frac{1}{2}\sigma_{mm}\cdot\sin2\rho,\quad S_1=-\sigma_{mm}\cdot\cos^2\rho-\frac{\sigma_{mm}}{2}\varphi_{mm}\cdot\sin2\rho+\left[\sigma_{mm}\cdot\sin\rho\cdot\sin2\varphi_{mm}\right.\\
&\qquad\left.-\omega\frac{r_{mn}+r_{mm}}{2}\left\{\sin\frac{\theta_{mn}+\theta_{mm}}{2}+\sin\rho\cdot\sin\left(2\varphi_{mm}+\frac{\theta_{mn}+\theta_{mm}}{2}\right)\right\}\right]\cdot(\theta_{mn}-\theta_{mm})-\left[\frac{2\sigma_{mm}\cdot\sin\rho}{r_{mn}+r_{mm}}(\sin\rho-\right.
\end{aligned}
$$

$$\cos 2\varphi_{mm}) - w\Big\{\cos\frac{\theta_{mn}+\theta_{mm}}{2} - \sin\rho\cdot\cos\Big(2\varphi_{mm}+\frac{\theta_{mn}+\theta_{mm}}{2}\Big)\Big\}\Big]\cdot(r_{mn}-r_{mm})$$

$$P_2 = \cos^2\rho + \frac{\sin 2\rho}{2}\varphi_{nn} + \sin\rho\cdot\sin 2\varphi_{nn}\cdot(\theta_{mn}-\theta_{nn}) - \frac{2\cdot\sin\rho}{r_{mn}+r_{nn}}(\sin\rho-\cos 2\varphi_{nn})\cdot(r_{mn}-r_{nn})$$

$$Q_2 = -\frac{1}{2}\sin 2\rho,\quad R_2 = \frac{1}{2}\sigma_{nn}\cdot\sin 2\rho,\quad S_2 = -\sigma_{nn}\cdot\cos^2\rho + \frac{\sigma_{nn}\cdot\varphi_{nn}}{2}\sin 2\rho + \Big[\sigma_{nn}\cdot\sin\rho\cdot\sin 2\varphi_{nn}$$
$$- w\frac{r_{nn}+r_{mn}}{2}\Big\{\sin\frac{\theta_{mn}+\theta_{nn}}{2} + \sin\rho\cdot\sin\Big(2\varphi_{nn}+\frac{\theta_{nn}+\theta_{mn}}{2}\Big)\Big\}\Big](\theta_{mn}-\theta_{nn}) - \Big[\frac{2\sigma_{nn}\cdot\sin\rho}{r_{mn}+r_{nn}}\cdot(\sin\rho -$$
$$\cos 2\varphi_{nn}) - w\Big\{\cos\frac{\theta_{nn}+\theta_{mn}}{2} - \sin\rho\cdot\cos\Big(2\varphi_{nn}+\frac{\theta_{mn}+\theta_{nn}}{2}\Big)\Big\}\Big]\cdot(r_{mn}-r_{nn})$$

$$D = (Q_1\cdot R_2 - Q_2\cdot R_1)^2,\qquad E = (P_1\cdot R_2 - R_2\cdot P_1)(R_2\cdot Q_1 - R_1\cdot Q_2) + (Q_1 R_2 - Q_2\cdot R_1)(S_2\cdot Q_1 - S_1\cdot Q_2)$$

$$F = (P_1 R_2 - R_1\cdot P_2)(S_2\cdot Q_1 - S_1\cdot Q_2) + (P_1\cdot Q_2 - P_2\cdot Q_1)(S_1\cdot R_2 - S_2\cdot R_1)$$

4. 計算方法

まず、トンネル周辺地山の全領域が塑性状態であると仮定して、トンネル円孔周線上を任意の数に等分して（実際の計算では、電子計算機－TOSBAC3400－の容量の関係で16等分したが、この等分数を増やす程、精度がよくなることは言うまでもない）、各等分点から出る2本の、C_+, C_- 辷り線の交点の座標、およびその点での(σ, φ)の値を前述の方法で求め、次いで、地山が弾性体とみなされる円形トンネル周辺の応力を求める理論式（H.Schmidt の理論）により、辷り線の交点での応力分布を求める。弾塑性境界決定方法としては、図 6に示すように、任意の辷り線に沿って、上述の塑性論、弾性論による辷り線方向のせん断力 $(\tau_0)_{pl}$, $(\tau_0)_{el}$ を求めて同一座標上にプロットし、両曲線の交点が、弾塑性境界上の点であると仮定する方法を採用した。

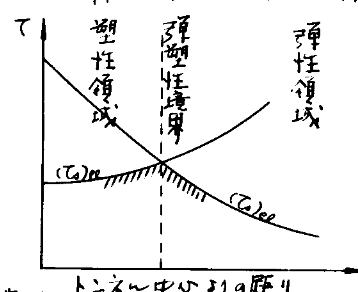

図-6

5. 計算例 および考察

水平地表面よりトンネル中心までの深さ	$H = 10.0^m$
円形トンネルの半径	$r_0 = 3.0^m$
地山の土の単位重量	$w = 2.5\,t/m^3$
〃 粘着力	$c\cdot\tan\rho = 0.375\,kg/cm^2$
ポアソン数	$\mu = 2.0$

に対して、内部まさつ角がそれぞれ $\rho = 15°, 25°, 33°50', 40°$ の場合について、電子計算機TOSBAC3400を利用して、計算を行った。図 7は結果を整理して、内部まさつ角が25°の場合の、辷り線、および前述の方法によって決定した弾塑性境界の形状を、トンネルの左半断面について、プロットしたものである。図において、斜線を施した部分が塑性領域、これより外方が弾性領域である。また、図 8は、4種類の内部マサツ角に対する、弾塑性境界の形状を比較するため、これらを同一面上に画いたものであるが、これによると、内部マサツ角が減少するにつれて、塑性領域はしだいに増大しており、いずれもトンネル上部において最大、下部で最小となっている。（重力の影響と考えられる）

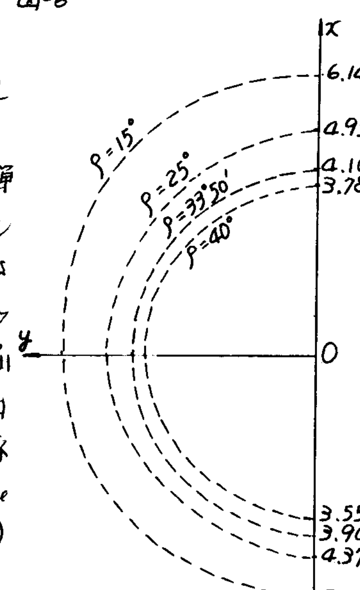

図-8

参考文献

1). 大井鉄郎：応用偏微分方程式論　岩波書店　1951
2). 第4回土質工学研究発表会講演概要集　P577～584

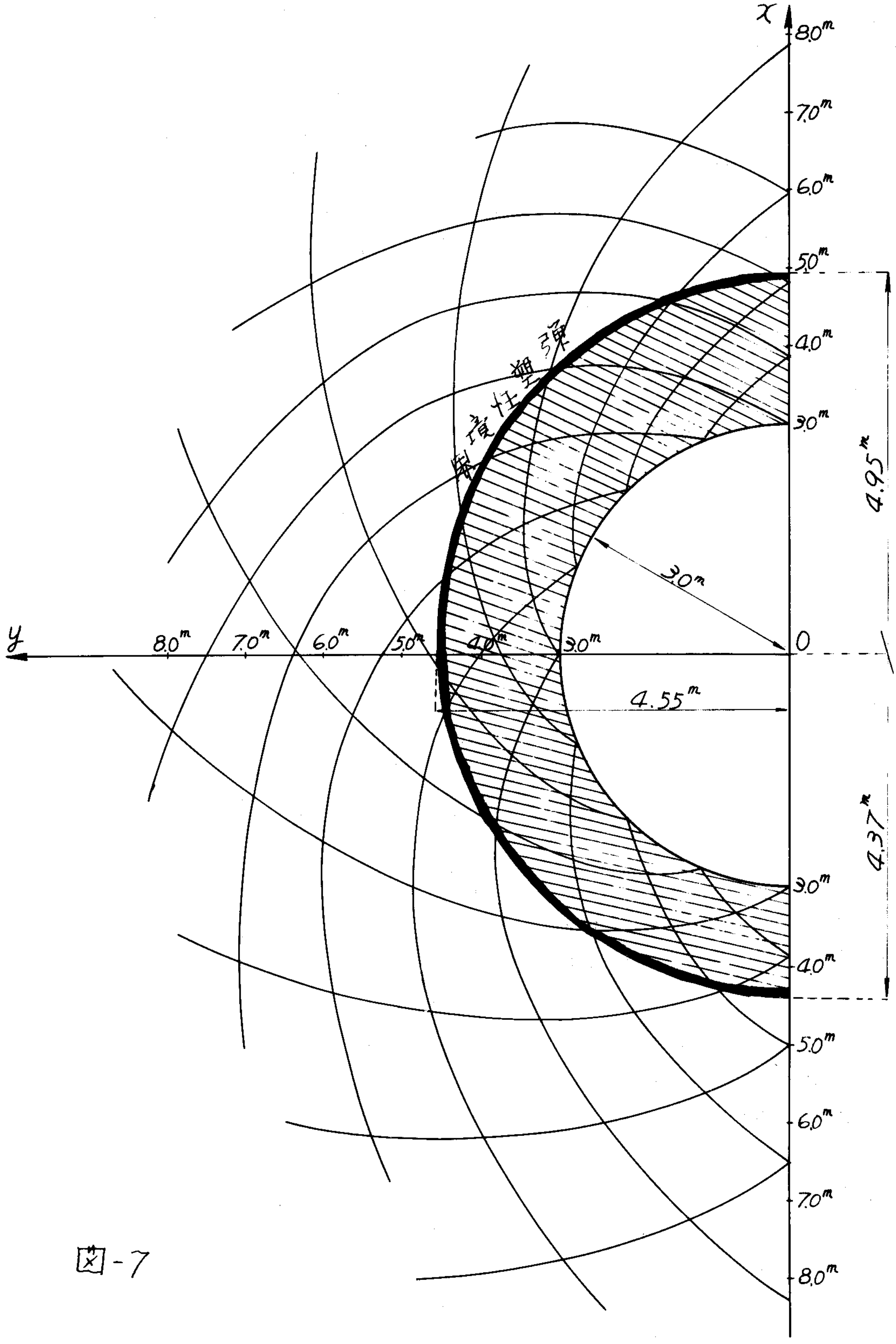
x
8.0m
7.0m
6.0m
5.0m
4.0m
3.0m
0
3.0m
4.0m
5.0m
6.0m
7.0m
8.0m
y
8.0m
7.0m
6.0m
5.0m
4.0m
3.0m
3.0m
4.55m
4.95m
4.37m
弾塑性境界

図-7