III−97　横等方性体内の巻立円形立坑周辺の弾塑性応力状態

京都大学工学部　正員　丹羽義次
京都大学工学部　正員　小林昭一
京都大学工学部　正員○平島健一

1. まえがき

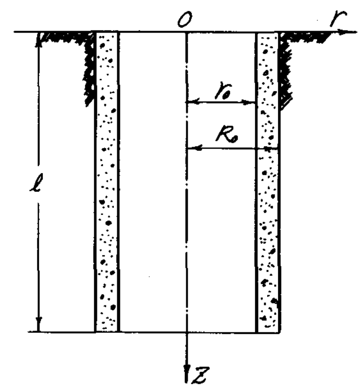
立坑を合理的に設計・施工するためには，地山を形成する材料の力学的性質，ならびに立坑周辺に生じる応力状態を適確に把握することが重要である。 それと同時に巻立立坑と地山材料の接触部分での境界条件をいかにえらぶかが重要な条件となる。

これらに関して，従来より，地山材料を等方性体と仮定した場合の立坑周辺の粘弾塑性応力状態の研究が数多くなされている[(1)~(4)]。

ここでは地山をより実際に近い状態として取扱うための一段階として，地山材料を横等方性の異方性体と仮定した場合の巻立円形立坑に生じる応力状態について検討を試みる。

2. 解析

地層を半無限に拡がった横方向等方性体(Transversely Isotropic Body)とみなし，この中に内径$2r_0$，立坑巻厚(R_0-r_0)の巻立円形立坑を施したとする。



右図のように立坑口における断面の中心に原点をとり，立坑の中心線をz軸とする円筒座標(r,θ,z)を採用する。 このようにするとz軸に直に横等方性体の異方性面が存在することになる。

この場合の一般化したHookeの法則はつぎのように書き表わせる。

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_r &= a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z \ , & \gamma_{\theta z} &= a_{44}\tau_{\theta z}\\
\varepsilon_\theta &= a_{12}\sigma_r + a_{11}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z \ , & \gamma_{rz} &= a_{44}\tau_{rz}\\
\varepsilon_z &= a_{13}(\sigma_r+\sigma_\theta) + a_{33}\sigma_z \ , & \gamma_{r\theta} &= 2(a_{11}-a_{12})\tau_{r\theta}
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ここに$a_{11}, a_{12}, \cdots a_{44}$は横等方性体の変形係数である。

方位方向の変位はz軸に関して対称であることを考慮すれば，$u_\theta=0$，したがって，$\gamma_{\theta z}=\gamma_{r\theta}(=0)$および$\tau_{\theta z}=\tau_{r\theta}=0$が成立する。

これより，独立な4個の応力成分$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$および$\tau_{rz}$に対する釣合条件式は重力の影響を考慮すれば，次式で与えられる。

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0 \ , \quad \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}+\rho g=0 \qquad (2)$$

等方性体の場合と同様に，応力関数$\varphi(r,z)$を導入すれば，応力成分は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{b}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+a\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) \ , & \sigma_\theta &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(b\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+a\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)\\
\sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left(c\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{c}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+d\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) \ , & \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+a\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}
a &= \frac{a_{13}(a_{11}-a_{12})}{a_{11}a_{33}-a_{13}^2} \ , & b &= \frac{a_{13}(a_{13}+a_{44})-a_{12}a_{33}}{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}\\
c &= \frac{a_{13}(a_{11}-a_{12})+a_{11}a_{44}}{a_{11}a_{33}-a_{13}^2} \ , & d &= \frac{a_{11}^2-a_{12}^2}{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

この場合，応力関数$\varphi(r,z)$は次の微分方程式を満足しなければならない。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{S_1^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{S_2^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi=-\rho g \qquad (5)$$

ここに，
$$S_1=\sqrt{\frac{a+c+\sqrt{(a+c)^2-4d}}{2d}}\ ,\quad S_2=\sqrt{\frac{a+c-\sqrt{(a+c)^2-4d}}{2d}} \qquad (6)$$

(5)式を満足する解はつぎのように級数解として与えられる。[5]

$$\varphi=(B_{20}z^2+B_{22}r^2)\ln r+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\ ,\quad \varphi_k=\left[A_kJ_0\left(\frac{k\pi i}{lS_1}r\right)+B_kJ_0\left(\frac{k\pi i}{lS_2}r\right)+C_kY_0\left(\frac{k\pi i}{lS_1}r\right)+D_kY_0\left(\frac{k\pi i}{lS_2}r\right)\right]\sin\frac{k\pi z}{l} \qquad (7)$$

ここに，J_0，Y_0はそれぞれ0次のBesselおよびWeber関数であり，$B_{20}, B_{22}, A_k, \cdots D_k$は境界条件から決定される常数である。したがって，横等方性体内の応力，変位はつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r&=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{l}\left\{\frac{1}{r}(1-b)\bar{\varphi}_k-\varphi_k^0-a\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\varphi_k\right\}\cot\frac{k\pi z}{l}+\frac{a_{13}}{a_{11}+a_{12}}\rho gz\ ,\quad \sigma_z=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{l}\left\{c\varphi_k^0+a\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\varphi_k\right\}\cot\frac{k\pi z}{l}-\rho gz\\
\sigma_\theta&=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{l}\left\{\frac{1}{r}(b-1)\bar{\varphi}_k-b\varphi_k^0-a\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\varphi_k\right\}\cot\frac{k\pi z}{l}+\frac{a_{13}}{a_{11}+a_{12}}\rho gz\ ,\quad \tau_{rz}=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\varphi_k^*+a\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\bar{\varphi}_k\right\}
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$$u_r=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi}{l}\left\{(\alpha-\beta)\bar{\varphi}_k-\frac{\alpha}{r}\varphi_k^0-\frac{\gamma}{r}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\varphi_k\right\}\cot\frac{k\pi z}{l}$$

$$w=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\bar{\alpha}\varphi_k^0+\gamma\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\varphi_k\right\}+\int\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left\{(\alpha-\beta)+\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2(a_{44}a-\bar{\gamma})\right\}\bar{\varphi}_k+\frac{\alpha}{r}\varphi_k^0+\frac{\gamma}{r}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\varphi_k+(a_{44}-\bar{\alpha})\varphi_k^*\right]dr-\frac{2a_{13}^2-a_{33}(a_{11}+a_{12})}{2(a_{11}+a_{12})}\rho gz^2$$

ここに，
$$\left.\begin{aligned}
\alpha&=(a_{12}+a_{11}b-a_{13}c)\ ,\quad \beta=(a_{12}b+a_{11}-a_{13}c)\ ,\quad \gamma=a(a_{12}+a_{11}-a_{12})\\
\bar{\alpha}&=(a_{13}+a_{13}b-a_{33}c)\ ,\quad \bar{\beta}=(a_{13}b+a_{13}-a_{33}c)\ ,\quad \bar{\gamma}=a(2a_{13}-a_{33})
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\varphi}_k&=\left[\omega_1\{A_kJ_1(\omega_1r)+C_kY_1(\omega_1r)\}+\omega_2\{B_kJ_1(\omega_2r)+D_kY_1(\omega_2r)\}\right]\sin\frac{k\pi z}{l}\\
\varphi_k^0&=\left[\omega_1^2\{A_kJ_0(\omega_1r)+C_kY_0(\omega_1r)\}+\omega_2^2\{B_kJ_0(\omega_2r)+D_kY_0(\omega_2r)\}\right]\sin\frac{k\pi z}{l}\\
\varphi_k^*&=\left[\omega_1^3\{A_kJ_1(\omega_1r)+C_kY_1(\omega_1r)\}+\omega_2^3\{B_kJ_1(\omega_2r)+D_kY_1(\omega_2r)\}\right]\sin\frac{k\pi z}{l}
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

$$\omega_1=\frac{k\pi i}{lS_1}\ ,\quad \omega_2=\frac{k\pi i}{lS_2}$$

巻立円形立坑(等方性体)に対する応力$\sigma_r', \sigma_\theta', \sigma_z', \tau_{rz}'$および変位$u_r', w'$についても同様にして求められる。

3. 境界条件

巻立円形立坑と地山材料の接触部分での境界条件としては，地山を形成する材質によりつぎの二つに大別できる。

条件I；接触部分の境界において応力，変位が完全に伝達される場合

$$\tau_{rz}'=\sigma_r'=0\ \ \text{at}\ \ r=r_0\ ,\quad \sigma_r'=\sigma_r,\ \tau_{rz}=\tau_{rz}',\ u_r'=u_r,\ w'=w\ \ \text{at}\ \ r=R_0 \qquad (12)$$

$$u_r=0,\ w=\frac{2a_{13}^2-a_{33}(a_{11}+a_{12})}{2(a_{11}+a_{12})}\rho gz^2\ \ \text{at}\ \ r=\infty\ ,\quad \tau_{rz}'=\sigma_z'=\tau_{rz}=\sigma_z=0\ \ \text{at}\ \ z=0 \qquad (13)$$

条件II；接触部分の境界において半径方向の応力，変位が伝達される場合

$$\tau_{rz}'=\sigma_r'=0\ \ \text{at}\ \ r=r_0\ ,\quad \sigma_r'=\sigma_r\ ,\ u_r'=u_r\ \ \text{at}\ \ r=R_0 \qquad (12')$$

4. むすび

以上，横等方性体内に巻立円形立坑を施した場合の応力状態に対する理論的な結果を示したが，これらに対する数値計算例および地山材料，巻立立坑の塑性化条件についての考察は学会当日発表する。

参考文献：

(1) 鈴木：日鉱誌，733号(昭24) (2) 伊藤：土木論集，46号(昭32) (3) 川本：土木論集 59号(昭33)
(4) 桜井：土木学会講演集(昭40-11，昭42-11，昭43-5) (5) Lekhnitskii; Holden-Day (1963) p 361