III−89 # 岩盤力学におけるクリープ関数についての考察

神戸大学 正員 桜井春輔

1．はしがき　岩盤は弾性および塑性の他に粘性を示すことが知られている。この粘性を考慮して岩盤力学の諸問題を解決するためには粘弾性学を適用する場合が多い。不連続性を示す岩盤の粘弾性的性質は非常に複雑であり今後の研究に待つところが大であるが，ここでは不連続体としての岩盤を平均的にならした等質等方の連続体として考え，粘弾性的性質は線型で Boltzmann の重ね合せの定理が成立するものと仮定する。このような仮定に立って岩盤力学の諸問題を境界値問題として解析する場合しばしば Volterra 型第二種の積分方程式を解く必要に出合う。いまクリープ関数が Kelvin model で表わされるならば，この積分方程式を容易に解くことができる。しかし岩盤の挙動は一般に Kelvin model によって完全に表わすことができない。したがってここでは任意な岩盤のクリープ関数に対する Volterra 型第二種積分方程式を差分法によって解き，その解とクリープ関数の関係についての考察を行なう。また Kelvin model によって表わされるクリープ関数を用いた場合の解の妥当性について検討を行なう。

2．基本方程式およびその解　粘弾性学を適用すれば岩盤力学の諸問題は次の Volterra 型第二種積分方程式を解くことに帰着する場合が多い。

$$y(t) + \lambda\int_0^t f'(t-t')\,y(t')\,dt' = f(t) \tag{1}$$

ここで $y(t)$ は求めようとする関数，$\underbrace{f(t)=C\cdot\psi(t)}$（λは定数），$C$ は定数，$\psi(t)$ はクリープ関数を表わす。いま，Kelvin model を仮定すればクリープ関数は

$$\psi(t) = (1 - e^{-t/\tau})/G^* \tag{2}$$

ここで G^* はモデルのバネ定数，τ は retardation time を表わす。この場合(1)式の解は次のようになる。

$$y(t) = \frac{C}{1-\tau\lambda}\left\{1 - e^{-\frac{t}{\tau}(1-\tau\lambda)}\right\} \tag{3}$$

次に，クリープ関数が非常に複雑な場合は(1)式を差分法による数値計算によって近似的に解を得ることができる。[1] すなわち

$$y(t_{n+1}) = \frac{f(t_{n+1}) + \frac{\lambda}{2}y(t_n)[f(0)-f(t_{n+1}-t_n)]}{1-\frac{\lambda}{2}[f(0)-f(t_{n+1}-t_n)]} + \frac{\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n-1}[y(t_{i+1})+y(t_i)][f(t_{n+1}-t_{i+1})-f(t_{n+1}-t_i)]}{1-\frac{\lambda}{2}[f(0)-f(t_{n+1}-t_n)]} \tag{4}$$

ここで　$y(0) = y(t_1) = f(0)$

3．数値計算例　初期応力が静水圧状態である粘弾性地山内の円形トンネル覆工に作用する地圧の時間的変化を求める基礎方程式は次のように表わされる。[2]

$$(p/p_0) + \frac{a}{A}\int_0^t \psi'(t-t')(p/p_0)\,dt' = \frac{a}{A}\psi(t) \tag{5}$$

ここで p は覆工に作用する地圧，p_0 は地山の初期応力，a は覆工の外径，A は覆工の剛性を表わす定数。いま覆工の内径を b，そのヤング係数を E_l，ポアソン比を ν_l とすれば，a/A は次式によって表わされる。すなわち，

$$a/A = E_\ell(a^2-b^2)\Big/(1+\nu_\ell)\,a^2\left(\frac{b^2}{a^2}+1-2\nu_\ell\right) \tag{6}$$

いま地山がKelvin modelによって表わし得る粘弾性体であると仮定すれば，クリープ関数 $\psi(t)$ は(2)式によって表わされ，その場合の(5)式の解は次のようになる。

$$p/p_0 = \frac{a}{AG^*+a}\left\{1-e^{-\frac{t}{\tau}\left(1+\frac{a}{AG^*}\right)}\right\} \tag{7}$$

岩盤に対するクリープ関数のデータは充分でないので，ここでは岩石に対するクリープ関数を用いて計算を行なう。図-1に一例として岩塩に対するクリープ実験の結果を示す。一般に岩石のクリープ曲線はKelvin modelで表わすことにかなり無理があるように思える。すなわちクリープ変形の初期(primary creep)と後期(Secondary creep)とでは異なったモデルによって表わされる。(model A および model B) また非常にあらっぽくクリープ曲線全体を表わすKelvin modelを model C とする。ここで $a=5^m$, $b=4.5^m$, $\nu_\ell=0.1$ とすれば，$a/A = 0.1E_\ell$ となる。いま $E_\ell=10^4$, 10^5 kg/cm² の場合についてそれぞれの modelに対する p/p_0 の時間的変化を(7)式を用いて求めると図-2のようになる。

一方，図-1に示す実験データをそのまゝ $\psi(t)$ として(4)式により数値計算を行なって求めた結果も図-2に示す。この図には比較のために $\frac{a}{A}\psi(t)$ 曲線をも示してある。図から明らかなように $E_\ell=10^4$ kg/cm² より小さい値に対しては p/p_0 は $\frac{a}{A}\psi(t)$ 曲線とほゞ一致している。すなわち(5)式は積分方程式として解く必要がなく

$$p/p_0 = \frac{a}{A}\psi(t) \tag{8}$$

として解が得られることを示している。したがって材料の粘弾性的性質をモデルで表現する必要がない。一般的に言えば，(5)式の右辺が 10^{-2} のオーダーであれば左辺第2項は無視できよう。右辺がそれより大きい場合その誤差は大きくなり，その場合はモデル化によって近似的に解を得ることができる。岩石のクリープ特性をKelvin modelによって表わす場合，全クリープ変形を単一のモデルによって表現することはできないが，前期と後期で異なったモデルを用いればかなり良い結果を得ることができる。なお変形後期のみに着目する場合は(7)式において $t=t+\alpha$ とすればよい。

参考文献： 1) E.H. Lee, T.G. Rogers, J. Appl. Mech. 1963, P127. 2) 桜井, 井藤, 第23回土木学会年次講演会, III部門 S43年