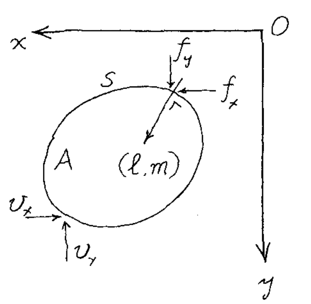
III-87

土の塑性論における極限解析定理（定常透水のある場合）

東京工業大学工学部　正員　山口　柏樹

筆者が前に導いた土の塑性力学における極限解析定理を既知間げき水圧のある場合，たとえば定常透水のある場合に拡張した結果を報告する。

二次元応力 σ'_{ij} $(\sigma'_x, \sigma'_y, \tau_{xy})$ は釣合方程式とMohr-Coulombの破壊規準を満すとし，ヒズミ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ $(\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\gamma}_{xy})$ は要素の速度成分 (v_x, v_y) から導かれ，一般的な形は $2\dot{\varepsilon}_{ij} = \partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i$ で表わされる。応力場に関して両者の間で仮想仕事の積分を求めると



(Fig. 1)

$$\int \sigma'_{ij}\cdot\dot{\varepsilon}_{ij}\,dA = \int(\sigma'_x\dot{\varepsilon}_x + \sigma'_y\dot{\varepsilon}_y + 2\tau_{xy}\dot{\gamma}_{xy})\,dA$$

$$= -\oint(f_x v_x + f_y v_y)\,ds - \int\gamma v_y\,dA + \int\left(\frac{\partial u}{\partial x}v_x + \frac{\partial u}{\partial y}v_y\right)dA$$

$$= -\oint(f_x v_x + f_y v_y)\,ds - \int\gamma' v_y\,dA + \int\gamma_w h v_n\,ds - \int\gamma_w h\dot{\theta}\,dA$$

ただし　$\dot{\theta} = \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y,\quad v_n = -v_x l - v_y m$　(1)

が得られる（Fig. 1参照）。なお u は間げき圧力，h は x 軸を基準として測るポテンシアルである。

下界定理：正解応力を σ'_{ij}，正解速度を $\boldsymbol{v}$ とし，$\boldsymbol{v}$ から導かれるヒズミ速度を $\dot{\varepsilon}_{ij}$ とする。$\dot{\varepsilon}_{ij}$ と適合しない可容応力を σ'^{*}_{ij} とかくと最大塑性仕事の原理によって $\sigma'_{ij}\cdot\dot{\varepsilon}_{ij} \geqq \sigma'^{*}_{ij}\cdot\dot{\varepsilon}_{ij}$ が行なわれる。したがって面積分をとつて式(1)を参照すると

$$\int\begin{pmatrix}\sigma'_{ij}\\ \sigma'^{*}_{ij}\end{pmatrix}\dot{\varepsilon}_{ij}\,dA = -\int_{S_V}\left\{\begin{pmatrix}f_x\\ f^*_x\end{pmatrix}V_x + \begin{pmatrix}f_y\\ f^*_y\end{pmatrix}V_y - \gamma_w h V_n\right\}ds - \int_{SF}(f_x v_x + f_y v_y - \gamma_w h v_n)\,ds$$

$$-\int\gamma' v_y\,dA - \int\gamma_w h\dot{\theta}\,dA$$

ただし境界条件が変位で規定される部分 S_V 上では v_x, v_y を特に V_x, V_y と書き，その上で σ'^{*}_{ij} を維持する可容表面力を $\boldsymbol{f}^*(f^*_x, f^*_y)$ とした。以上により

$$-\int_{S_V}(f_x V_x + f_y V_y)\,ds \geqq -\int_{S_V}(f^*_x V_x + f^*_y V_y)\,ds \qquad (2)$$

下界定理(2)は重力，透水力の有無にかゝわらず成立つが，応力や速度に不連続が存在しても同じ形式のものが得られることも容易に証明できる。

上界定理：可容速度 $\boldsymbol{v}^*$ は等方性，可圧性の二条件と S_V 上で $\boldsymbol{v}$ (V_x, V_y) に等しい。こゝで $\boldsymbol{v}^*$ から導かれる $\dot{\varepsilon}^*_{ij}$ と適合する応力を σ'^{*}_{ij} とすると，これらの間には次の関係が成立つ。

$$\begin{pmatrix}\dot{\varepsilon}^*_x\\ \dot{\varepsilon}^*_y\end{pmatrix} = \dot{\lambda}^*\left\{\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}(\bar{\sigma}^*_x - \bar{\sigma}^*_y) - (\bar{\sigma}^*_x + \bar{\sigma}^*_y)\sin^2\phi'\right\},\quad \dot{\gamma}^*_{xy} = 2\dot{\lambda}^*\tau^*_{xy} \qquad (3)$$

こゝに応力は換算応力で書いてある。これよりSchwarzの不等式を利用して計算すると $\sigma'_{ij}\dot{\varepsilon}^*_{ij} \leqq \sigma'^{*}_{ij}\dot{\varepsilon}^*_{ij}$ が結論される。この体積分をとり，左辺を(1)，右辺を(3)で改めると

$$\int \sigma'_{ij} \dot{\varepsilon}^{*}_{ij}\, dA = -\int_{S_F}(f_x v^*_x + f_y v^*_y - \gamma_w h v^*_n)\, ds - \int_{S_V}(f_x V_x + f_y V_y - \gamma_w h V_n)\, ds$$
$$-\int \gamma' \dot{v}^*_y\, dA - \int \gamma_w h \dot{\theta}^*\, dA \leqslant \int \sigma'^{*}_{ij} \dot{\varepsilon}^{*}_{ij}\, dA = 2\int \dot{\lambda}^* c'(\bar{\sigma}^*_x + \bar{\sigma}^*_y) \sin\phi' \cos\phi'\, dA$$

ここで $\dot{\theta}^* = \dot{\varepsilon}^*_x + \dot{\varepsilon}^*_y = -2\dot{\lambda}^*(\bar{\sigma}^*_x + \bar{\sigma}^*_y)\sin^2\phi' = -2\dot{\gamma}^*_{max}\sin\phi'$ を考慮すると上式より

$$-\int_{S_V}(f_x V_x + f_y V_y)\, ds \leqslant -\oint \gamma_w h v^*_n\, ds + \int_{S_F}(f_x v^*_x + f_y v^*_y)\, ds$$
$$+\int \gamma' v^*_y\, dA + 2\int (c'\cos\phi' - \gamma_w h \sin\phi')\dot{\gamma}^*_{max}\, dA \qquad (4)$$

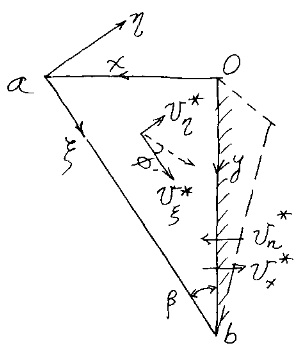
なる上界定理を得る。

$(\sigma'^{*}_{ij}, \dot{\varepsilon}^*_{ij})$ に応力の不連続が存在しても式（4）は形を変えずに成立つ。他方速度の不連続線が存在するときに，これを Γ^* とすると上式の右辺に

$$\int_{\Gamma^*} c'\, \delta v^*_s\, d\Gamma^* \ (>0) \qquad (5)$$

が付加される。こゝに δv^*_s は速度の不連続線（すなわちスベリ線）に沿う速度成分の飛躍量。

例：土圧論への応用。



(Fig. 2)

(Fig. 2) で ab と平行に連続的にすべる適合速度を仮定し $v^*_\xi = a\eta$ $(a>0)$ とする。スベリ帯 $d\eta$ について速度差が $\delta v^*_\xi = a\, d\eta$, $\delta v^*_\eta = a\, d\eta \cdot \tan\phi'$ のようになる。すなわち $v^*_\eta = v^*_\xi \tan\phi' = a\eta \tan\phi'$。これより xy 座標に変換して

$$v^*_x = a\eta \sin(\phi'+\beta)\sec\phi', \quad v^*_y = -a\eta\cos(\phi'+\beta)\sec\phi'$$

壁で $\eta = (H-y)\sin\beta$ だから下端周り回転となる。

$\dot{\varepsilon}^*_\xi = 0$, $\dot{\varepsilon}^*_\eta = a\tan\phi'$, $2\dot{\gamma}^*_{\xi\eta} = a$ に注意すると

$$2\dot{\gamma}^*_{max} = \sqrt{(\dot{\varepsilon}^*_\xi - \dot{\varepsilon}^*_\eta)^2 + 4\dot{\gamma}^{*2}_{\xi\eta}} = a\sec\phi'$$

水位急降時には ab (S_V) 上で $h=0$, $v^*_n=0$, $V_x, V_y = 0$, ob (S_F) 上で $h=-y$, $v^*_n = -v^*_x$ かつ壁が滑らかとして $f_y = 0$

また oa (S_F) 上では $\mathbf{f}=0$, 最後に A の内部で $h=0$ に注意すると式（4）より

$$0 \leqslant -\int_0^H \gamma_w(-y)(-v^*_x)\, dy + \int_0^H f_x v^*_x\, dy + \int \gamma' v^*_y\, dA + \int c'\, dA$$

$c'=0$ なら f_x は y に比例し，上式を計算の結果

$$\int_0^H f_x (H-y)\, dy = \frac{PH}{3} \geqslant \frac{H^3}{6\sin(\phi'+\beta)}\left\{\gamma\tan\beta\cos(\beta+\phi') + \gamma_w \frac{\sin\phi'}{\cos\beta}\right\}$$

こゝに P は水平土圧である。上式の右辺は $\beta = \pi/4 - \phi'/2$ で最大となるから

$$P \geqslant \frac{\gamma H^2}{2}\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2}\right) + \frac{\gamma_w H^2 \sin\phi'}{1+\sin\phi'}$$

[1] 山口柏樹（1967）土の剛塑性理論における極限定理と応用，土木学会論文集 NO. 145

[2] Hakuju Yamaguchi (1967) Discontinuity of stress and velocity in the rigid plastic field in soil mechanics, SOIL AND FOUNDATION