III−40　　地盤と地下構造物との動的相互作用に関する基礎研究

京都大学工学部　正　員　赤井浩一
京都大学大学院　学生員　堀　正幸

1. まえがき　カルバートや地下道などの地下構造物を含む地盤に地震波や種々の衝撃波が伝播するとき，地下構造物とその周辺地盤との間に密接な相互作用が起こる。この現象を十分把握することは地下構造物の合理的設計や周辺地盤の破壊を論ずる上に重要なことである。われわれはこの種の問題の基礎研究として構造物モデルにシリンダーを用意し，それを粘性土に埋め込んで縦衝撃波を与えることによってシリンダーと粘性土との動的相互作用を実験的に考察しかつ理論との比較を試みた。

2. モデル化とその解析*　完全剛性シリンダーを含む半無限媒質中に急激な応力波が伝播する問題を考える。問題の簡略化のために媒質は重線型塑性モデルとし応力波は瞬間的に降伏応力まで立ち上がるステップ波形とする。一般的に図-1に示すように面圧縮波が波速$C_{11}$，入射角$\theta_1$で剛な境界面にぶつかると縦波と横波が反射波として出てゆき，反射領域ではさらに載荷が進み媒質は塑性化される。2つの反射波のそれぞれの波速を$C_{12}$，$C_{22}$とすると次式で与えられる。

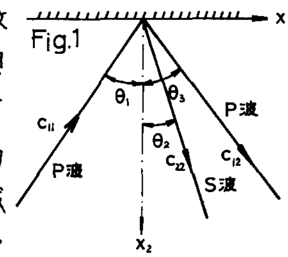


Fig.1

$C_{11}^2=(\lambda_1+2\mu_1)/\rho$ ,　$C_{12}^2=(\lambda_2+2\mu_2)/\rho$ ,　$C_{22}^2=\mu_2/\rho$　(1)　($\rho$：媒質の密度，$\lambda$，$\mu$：Lamé の定数，添字1，2はそれぞれ弾性領域，塑性領域を示す。)　入射波の運動方程式はつぎの二次元波動方程式によって表わされる。　$\nabla^2\phi=(1/C_{11}^2)\partial^2\phi/\partial t^2$　(2)　($\phi$：$u_{x_1}^{(i)}=\partial\phi/\partial x_1$，$u_{x_2}^{(i)}=\partial\phi/\partial x_2$ (3) で定義される変形ポテンシャル)　弾性学によると各応力成分は次式で表わされる。

$$\sigma_{x_1x_1}=\lambda_1\nabla^2\phi+2\mu_1\partial^2\phi/\partial x_1^2\ ,\quad \sigma_{x_2x_2}=\lambda_1\nabla^2\phi+2\mu_1\partial^2\phi/\partial x_2^2\ ,\quad \tau_{x_1x_2}=2\mu_1\partial^2\phi/\partial x_1\partial x_2 \qquad (4)$$

式(2)を境界条件と初期条件によって解くと，入射弾性変形ポテンシャル$\phi^{(i)}$は次式で与えられる。

$$\phi^{(i)}=\frac{p}{2\rho}\left(t-\frac{x_1\sin\theta_1-x_2\cos\theta_1}{C_{11}}\right)^2 H\left(t-\frac{x_1\sin\theta_1-x_2\cos\theta_1}{C_{11}}\right) \qquad (5)$$

($p$：入射応力の大きさ　$H(t,x)$：Heaviside のステップ関数　時間$t$はwave frontが剛な境界面に達した瞬間から計るものとする。)　式(5)を式(4)に代入すると各入射応力は次式で与えられる。

$$\sigma_{x_1x_1}^{(i)}=\frac{\lambda_1+2\mu_1\sin^2\theta_1}{\lambda_1+2\mu_1}\,p\,H\left(t-\frac{x_1\sin\theta_1-x_2\cos\theta_1}{C_{11}}\right) \quad (6) \qquad \sigma_{x_2x_2}^{(i)}=\frac{\lambda_1+2\mu_1\cos^2\theta_1}{\lambda_1+2\mu_1}\,p\,H\left(t-\frac{x_1\sin\theta_1-x_2\cos\theta_1}{C_{11}}\right) \quad (7)$$

$$\tau_{x_1x_2}^{(i)}=\frac{2\mu_1\sin\theta_1\cos\theta_1}{\lambda_1+2\mu_1}\,p\,H\left(t-\frac{x_1\sin\theta_1-x_2\cos\theta_1}{C_{11}}\right) \quad (8)$$

反射変形ポテンシャル$\phi^{(r)}$, $\psi^{(r)}$を次のように定義することによって(2)と同様な波動方程式を得る。

$$u_{x_1}^{(2)}=\partial\phi^{(r)}/\partial x_1+\partial\psi^{(r)}/\partial x_2 \qquad u_{x_2}^{(2)}=\partial\phi^{(r)}/\partial x_2-\partial\psi^{(r)}/\partial x_1 \qquad (9)$$

$$\nabla^2\phi^{(r)}=(1/C_{12}^2)\partial^2\phi^{(r)}/\partial t^2 \qquad \nabla^2\psi^{(r)}=(1/C_{22}^2)\partial^2\psi^{(r)}/\partial t^2 \qquad (10)$$

式(10)の解は次式で与えられる。

*参考文献；Air Force Special Weapons Center：A Theoretical Analysis of Stress Wave Interaction in a Model Soil, Report No. AD-411367, 1963

$$\left.\begin{aligned}\phi^{(r)}&=\frac{A}{2\rho}\left(t-\frac{x_1\sin\theta_3+x_2\cos\theta_3}{C_{12}}\right)^2 H\left(t-\frac{x_1\sin\theta_3+x_2\cos\theta_3}{C_{12}}\right)\\ \psi^{(r)}&=\frac{B}{2\rho}\left(t-\frac{x_1\sin\theta_2+x_2\cos\theta_2}{C_{22}}\right) H\left(t-\frac{x_1\sin\theta_2+x_2\cos\theta_2}{C_{22}}\right)\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

(A. B：境界条件 $u_{x_1}^{(i)}+u_{x_1}^{(r)}\Big|_{x_2=0}=u_{x_2}^{(i)}+u_{x_2}^{(r)}\Big|_{x_1=0}=0$ (12) によって決定される反射係数）式(3),(4),(9),(10),(11),(12) より $\sin\theta_1/C_{11}=\sin\theta_2/C_{22}=\sin\theta_3/C_{12}$ （Snellの法則） (13)

$$R_{pp}=\frac{A}{p}=\frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin\theta_1\sin\theta_2+\frac{C_{11}}{C_{12}}\cos\theta_2\cos\theta_3}\ ,\quad R_{ps}=\frac{B}{p}=-\frac{C_{22}}{C_{11}}\frac{\sin\theta_1\left\{\frac{C_{11}}{C_{12}}\cos\theta_3+\cos\theta_1\right\}}{\sin\theta_1\sin\theta_2+\frac{C_{11}}{C_{12}}\cos\theta_2\cos\theta_3} \quad (14)$$

図-2に示すように完全剛な半径$a$のシリンダーによって反射する応力波について考える。wave front がシリンダー crown にぶつかった瞬間から時間を計かるものとすると,入射弾性変形ポテンシャルは次式となる。

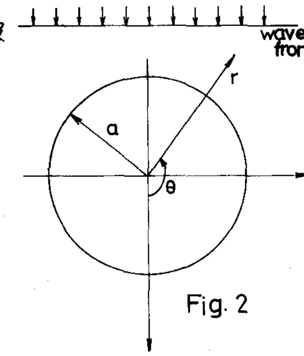


Fig. 2

$$\phi^{(i)}=\frac{p}{2\rho}\left(t-\frac{a+r\cos\theta}{C_{11}}\right)^2 H\left(t-\frac{a+r\cos\theta}{C_{11}}\right) \quad (15)$$

Gilbert によると反射変形ポテンシャルは次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}\phi^{(r)}&=\frac{p}{2\rho}D_{pp}R_{pp}\left(t-\frac{R_p}{C_{12}}-\frac{a(1+\cos\eta_p)}{C_{11}}\right)^2 H\left(t-\frac{R_p}{C_{12}}-\frac{a(1+\cos\eta_p)}{C_{11}}\right)\\ \psi^{(r)}&=\frac{p}{2\rho}D_{ps}R_{ps}\left(t-\frac{R_s}{C_{22}}-\frac{a(1+\cos\eta_s)}{C_{11}}\right)^2 H\left(t-\frac{R_s}{C_{22}}-\frac{a(1+\cos\eta_s)}{C_{11}}\right)\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

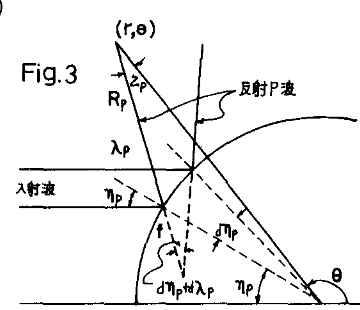


Fig.3

（ $R_{pp}$, $R_{ps}$： 反射係数 $D_{pp}$, $D_{ps}$：発散係数，$\eta_p$, $\eta_s$：入射角）
発散係数は次式で与えられる。

$D_{pp}=\{f/(f+R_p)\}^{\frac{1}{2}}$ , $D_{ps}=\{g/(g+R_s)\}^{\frac{1}{2}}$ (17) ($f, g$：シリンダー表面上での反射P波，S波の曲率半径，$R_p$, $R_s$：シリンダー表面から観測点に至る距離) 図-3は反射P波の幾何学的図である。図より

$f=a\cos^2\lambda_p/\{\cos\lambda_p+(C_{12}/C_{11})\cos\eta_p\}$ (18) 同様に $g=a\cos^2\lambda_s/\{\cos\lambda_s+(C_{22}/C_{11})\cos\eta_s\}$ (19)

式(13), (14)より

$$\left.\begin{aligned}R_{pp}&=\frac{\cos\eta_p\left\{1-\left(\frac{C_{22}}{C_{11}}\right)^2\sin^2\eta_p\right\}^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{C_{22}}{C_{11}}\right)\sin^2\eta_p}{\frac{C_{11}}{C_{12}}\left\{1-\left(\frac{C_{12}}{C_{11}}\right)^2\sin^2\eta_p\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{1-\left(\frac{C_{22}}{C_{11}}\right)^2\sin^2\eta_p\right\}^{\frac{1}{2}}+\frac{C_{22}}{C_{11}}\sin^2\eta_p}\\ R_{ps}&=-\frac{C_{22}}{C_{11}}\frac{\sin\eta_s\left[\frac{C_{11}}{C_{12}}\left\{1-\left(\frac{C_{12}}{C_{11}}\right)^2\sin\eta_s\right\}^{\frac{1}{2}}+\cos\eta_s\right]}{\frac{C_{11}}{C_{12}}\left\{1-\left(\frac{C_{12}}{C_{11}}\right)^2\sin^2\eta_s\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{1-\left(\frac{C_{22}}{C_{11}}\right)^2\sin\eta_s\right\}^{\frac{1}{2}}+\frac{C_{22}}{C_{11}}\sin^2\eta_s}\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

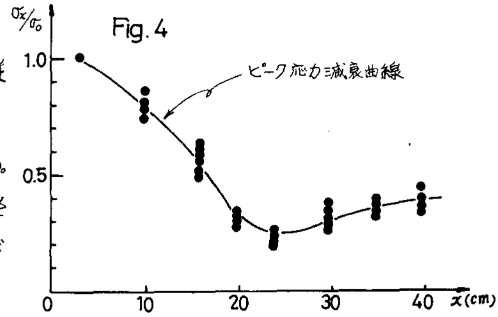
最終的に半径方向の反射応力$\sigma_{rr}^{(r)}$,接線方向の反射応力$\sigma_{\theta\theta}^{(r)}$,せん断応力$\tau_{r\theta}^{(r)}$は次式で与えられる。

$$\sigma_{rr}^{(r)}=\frac{\lambda_2+2\mu_2\cos^2 Z_p}{C_{12}^2}\frac{p}{\rho}D_{pp}R_{pp}H\left[t-\frac{R_p}{C_{12}}-\frac{a(1-\cos\eta_p)}{C_{11}}\right]-2\mu_2\frac{\sin Z_s\cos Z_s}{C_{22}^2}\frac{p}{\rho}D_{ps}R_{ps}H\left[t-\frac{R_s}{C_{22}}-\frac{a(1-\cos\eta_s)}{C_{11}}\right] \quad (21)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(r)}=\frac{\lambda_2+2\mu_2\sin^2 Z_p}{C_{12}^2}\frac{p}{\rho}D_{pp}R_{pp}H\left[t-\frac{R_p}{C_{12}}-\frac{a(1-\cos\eta_p)}{C_{11}}\right]+2\mu_2\frac{\sin Z_s\cos Z_s}{C_{22}^2}\frac{p}{\rho}D_{ps}R_{ps}H\left[t-\frac{R_s}{C_{22}}-\frac{a(1-\cos\eta_s)}{C_{11}}\right] \quad (22)$$

$$\tau_{r\theta}^{(r)}=\mu_2\left\{\frac{\sin^2 Z_s-\cos^2 Z_s}{C_{22}^2}\frac{p}{\rho}D_{ps}R_{ps}H\left[t-\frac{R_s}{C_{22}}-\frac{a(1-\cos\eta_s)}{C_{11}}\right]-\frac{2\sin Z_p\cos Z_p}{C_{12}^2}\frac{p}{\rho}D_{pp}R_{pp}H\left[t-\frac{R_p}{C_{12}}-\frac{a(1-\cos\eta_p)}{C_{11}}\right]\right\} \quad (23)$$

3. 実験装置　径15cm,長さ約50cmの円柱状粘土供試体を鉛直に立て地中構造物のモデルとして直径6cmの円形シリンダーを供試体上端から20cmの位置に水平に埋め込む。理論解析では剛性シリンダーについてのみ扱ったが，実験では比較のために幾分たわみ性をもった薄肉円筒も用意し，これについても実験を行なった。たわみ性シリンダーには変形を調べるためにstrain gageをcrownとsideに，またシリンダー全体の移動を調べるために加速度計を装置した。落錘によってシリンダー周辺の粘性土に生じるパルス応力をシリンダー表面から1cm離して埋め込んだ超小型圧力計によってピックアップし増巾器を通して電磁オッシロに記録させる。




4. 結果と考察　シリンダーを含まない供試体による縦衝撃波動伝播実験結果の一例が図-4に示されており，この粘土供試体のピーク応力減衰特性を知ることができる。剛性シリンダーを含む粘土供試体の周辺で得られる半径応力の波形は図-1からも分かるように入射波と反射波が重なって構成されていることが予測される。したがって入射応力と反射応力を分離するには入射応力がどのぐらいの大きさかを知る必要がある。式(7)の入射半径応力 $\sigma_{rr}^{(i)}$ は次のようにポアソン比 $\nu$ で表示することができる。

$$\sigma_{rr}^{(i)} = p\left(\cos^2\theta + \frac{\nu}{1-\nu}\sin^2\theta\right) \qquad (24)$$

ところが式(24)の第2項は供試体の側方を完全拘束する場合に響いてくる項であり，実験では側方拘束はfreeとしたために第2項を0とおくことができる。すなわち数式上では $\nu=0$ とすることになる。したがって，供試体の応力減衰も考慮して入射半径応力は次式で与えられる。

$$\sigma_{rr}^{(i)} = \sigma_x \cos^2\theta \qquad (25)$$

（$\sigma_x$：図-4のピーク応力減衰曲線から読みとった各断面での鉛直応力）

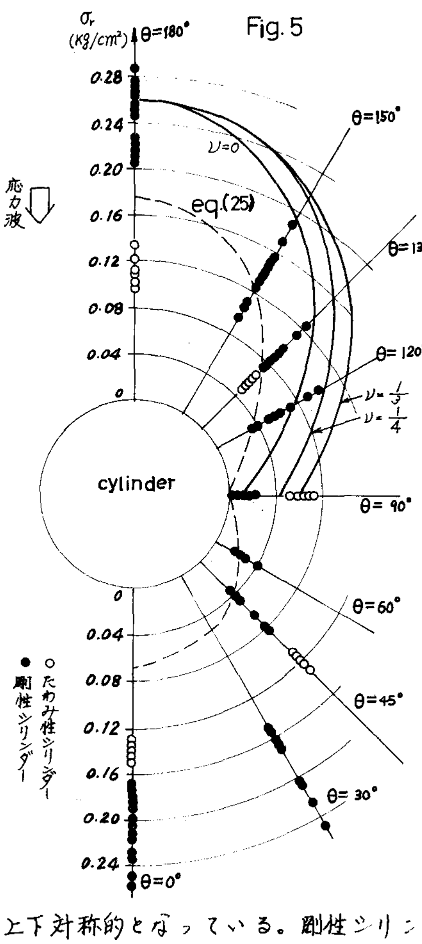



図-5はシリンダーを供試体に埋め込んでその周辺粘性土に生じる半径応力を実験によって得たものである。ここでシリンダーの水平直径に関してその上下で生じる応力の性質が全く異なることは容易に理解できる。すなわち上方の土は直接応力波を受けるが，下方の土は応力波の進行に対しシリンダーの陰となり直接応力波は受けないけれども，シリンダーと粘土との剛性の違いによって受働的な応力を受ける。実験結果ではシリンダーの下方の土も大きな応力を受けており，剛性シリンダーの場合半径応力の分布形はたて方向に細長くかつ上下対称的となっている。剛性シリンダーの場合について式(7)と式(21)でポアソン比 $\nu=\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, 0と仮定して計算した理論値が示されている。$\nu=\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ではこの理論が二次元平面ひずみ問題として解いているため実験値よりもかなり大きな値と

なっているが，前述したν=0という側方拘束なしの条件のもとでは実験値と計算値の接近が見られる。つぎにたわみ性シリンダーにおいては，半径応力の分布形が剛性シリンダーのそれと全く異なる。たわみ性シリンダーについてはZ.の理論は適用できず，シリンダーの変形を考慮しながら現象を理解しなければならない。シリンダーのcrownは応力波を受けて内側に変形し，そのためにcrown付近の粘性土にアーチング効果が生じ応力の消失となる。実験結果では本来の入射応力よりもかえって小さな応力しか受けていない。またsideは外側に変形し，そのために付近の土に反力が起り，剛性シリンダーの場合に比べかなり大きな応力を受けていることがわかる。たわみ性シリンダーについて周辺の粘性土で得られる応力波形とシリンダーの変形あるいはシリンダー全体の移動との時間的関係をみるために電磁オッシログラフの一例を図-6に示した。シリンダー変形のピークとcrown, side, bottomでの応力波形のピークが同時に起こっており，これらの位置での土がシリンダーの変形と密接な相互関係にあることがわかる。またシリンダー全体の移動はそれらより非常に遅れて最大に達しており変位の時間遅れが明瞭に見られる。

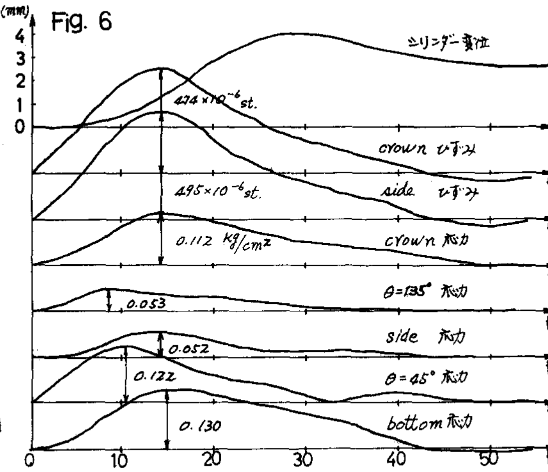


Fig. 6

剛性シリンダー周辺の粘性土が衝撃的応力波伝播時にどのような応力状態となっているか，あるいは破壊に対する余裕を調べるためにMohr円によって考察を行なった。図-7はその説明図である。図-8は粘土試料の静的，動的応力－ひずみ関係である。これまでの土の動的研究によっても動的載荷に対しては瞬間的に静的強度の1.5～2.0倍の強度を発揮することが知られている。図-9に記入されている破壊線はこの応力－ひずみ関係から得られたせん断強度線である。実線の円はシリンダーを含む場合の全応力(入射応力+反射応力)で描いたものであり，破線の円は入射応力によるものである。θ=180°～150°までのMohr円は動的破壊線にすでに接しており，illuminated zoneのうちθ=180°～150°までの粘土は降伏しているものと思われる。またθ=150°～90°では降伏に対する余裕は十分あり，特にside付近の土はシリンダーを含む場合には，ない場合よりもかえって破壊に対する余裕が大きくなることが分かる。

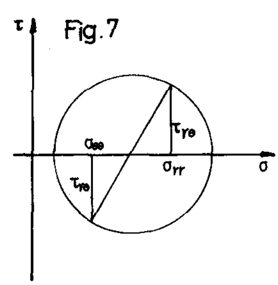


Fig.7

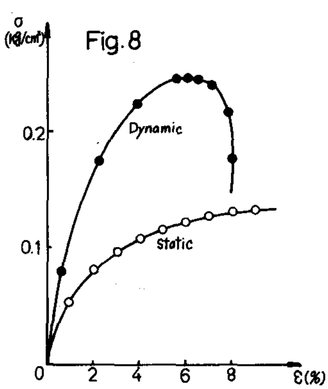


Fig.8

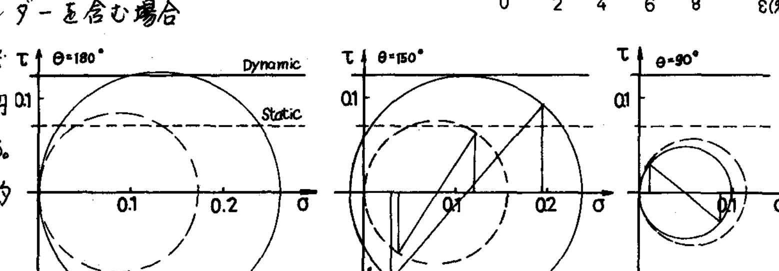


Fig.9