III－36　　　動的圧力球根について

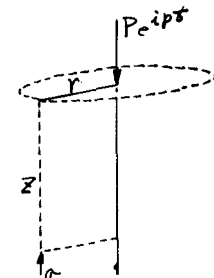
東京工業大学　伯野元彦　　建設省　藤城泰行
東京工業大学大学院　○横山功一

## 1．はじめに

地盤の表面に荷重が作用した場合に、地盤中に生ずる応力を求める事は、構造物の沈下計算や地中構造物の設計等に才一に必要な事である。　荷重が静的な場合は、Boussinesqの問題等で、理論的に求められており、圧力球根の図、表が作製され、実用の便に供されている。　しかしながら、機械台基礎に対する機械による加振力や、地中埋設管の自動車等の走行荷重による破壊、地盤の振動締固めについての問題点の把握等を考えると、静的な場合のみでなく、振動的外力が加わった時の、地盤中に生ずる応力を求める事が必要になる。　本研究では、地盤を半無限弾性体と考えて、その表面に単一の点加振の場合と、等分布円荷重（半径 $r_0$）で加振された場合に、地盤に生ずる応力分布を求め、静的な場合と比較する。

## 2．基礎方程式

図－1のように、半無限弾性体の表面を $z=0$ とし、鉛直軸 $z$ を下方に向けて円筒座標（$r$，$\theta$，$z$）を考えて、$u_r$, $u_z$ をそれぞれ $r$，$z$ 軸方向の変位成分とする。　変位は $z$ 軸に関して対称であるから、$\theta$ 方向は考える必要はない。



図－1

その時の波動方程式は次のように書ける。

$$\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial r} + 2\mu\frac{\partial\omega}{\partial z}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z} - \frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial z}(r\omega)$$

ここに、

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)$$

$\lambda =$ Lamé の定数 $\left(= \frac{2\mu\sigma}{1-2\sigma} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\right)$

又、鉛直方向の垂直応力 $\sigma_z$ と、$z$ に垂直な面に働く剪断応力 $\tau_{zr}$ は、

$$\sigma_z = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\tau_{zr} = \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)$$

で表わされる。　そして、波動方程式の解は次のように与えられる。

$$u_r = (kAe^{-n_1 z} + n_2 Be^{-n_2 z})\,J_1(kr)\,e^{ipt}$$

$$u_z = (n_1 Ae^{-n_1 z} + kBe^{-n_2 z})\,J_0(kr)\,e^{ipt}$$

ここに、$k^2 = \frac{p^2}{\alpha^2} + n_1^2 = \frac{p^2}{\beta^2} + n_2^2$，$\alpha = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho} = VP$，$\beta = \sqrt{\mu/\rho} = VS$

$J_0$，$J_1$ ：Bessel 関数

又、応力については、

$$\sigma_z = \left[\left\{\frac{2\sigma}{1-2\sigma}(k^2-n_1^2) - 2n_1^2\right\}Ae^{-n_1 z} + 2kn_2 Be^{-n_2 z}\right] J_0(kr)\,\mu e^{ipt}$$

$$\tau_{zr} = -\mu\left\{2kn_1 Ae^{-n_1 z} + \left(2k^2 - \frac{p^2}{\beta^2}\right)Be^{-n_2 z}\right\} J_0(kr)\,e^{ipt}$$

## 3. 解法

加振力として、原点においてｚ軸方向に作用する上下方向加振力 $Pe^{ipt}$ を考えて、境界条件に合うように定数A，Bを定める。

一点加振の時の境界条件：

$$\sigma_z \Big|_{z=0} = -Pe^{ipt} \qquad (r=0)$$
$$= 0 \qquad (r>0)$$
$$\tau_{zr} \Big|_{z=0} = 0$$

$\sigma_z$ に関する条件をFourier‐Bessel 級数に展開すると

$$\sigma_z \;{}_{z=0} = -\frac{Pe^{ipt}}{2\pi}\int_0^\infty J_0(kr)\, k\, dk$$

となる。　そこで、応力の一般解でｚ＝０としたときと比較して、A，Bを求める。

$$A = \frac{Pk}{2\pi\mu}\left(2k^2 - \frac{p^2}{\beta^2}\right)\frac{dk}{F(k)}$$
$$B = -\frac{Pk}{2\pi\mu}\cdot 2k n_1 \frac{dk}{F(k)}$$

ただし、$F(k) = \left(2k^2 - \frac{p^2}{\beta^2}\right)^2 - 4k^2 n_1 n_2$　（Rayleigh 関数）

このA，Bを応力の一般解に代入してｋに関して $\int_0^\infty$ をほどこせば、$\sigma_z$，$\tau_{zr}$ が求まる。

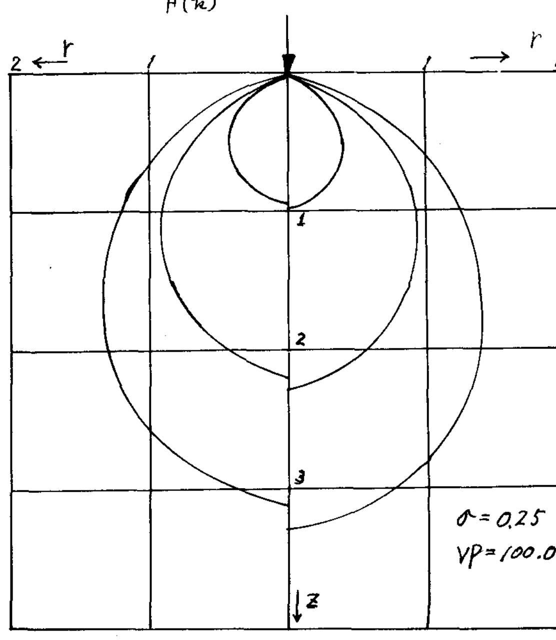
$$\sigma_z = \frac{Pe^{ipt}}{\pi}\int_0^\infty \left\{k\left(2k^2 - \frac{p^2}{\beta^2}\right)\left(\frac{\sigma}{1-2\sigma}\frac{p^2}{\beta^2} - n_1^2\right)e^{-n_1 z} + 2k^3 n_1 n_2 e^{-n_2 z}\right\}\frac{J_0(kr)}{F(k)}\,dk$$
$$\tau_{zr} = \frac{Pe^{ipt}}{\pi}\int_0^\infty k^2 n_1\left(2k^2 - \frac{p^2}{\beta^2}\right)\left(e^{-n_2 z} - e^{-n_1 z}\right)\frac{J_1(kr)}{F(k)}\,dk$$

## 4. 数値計算の結果及び考察

上の無限積分を電子計算機を用いて計算した。積分の中のRayleigh 関数は実根をもっているから、この積分は積分路上に極が存在する事になる。結果は複素数で表わされるので、絶対値をとり、等応力の点を結んで図を作製した。

図－２から、表面近くでは差はあまりないが深くなるにつれて、振動的外力の場合の方が、大きな応力が生じている。

又、表－１から振動数が大きくなるほど同じ場所では、応力が大きくなる傾向が表われている。振動数として、２，５，10，25，50 Hz と変化させる。




図－２　左：静的　　右：Ｔ＝0.2

表－１．　振動数を変えた時の半径方向の応力変化　（ｚ＝1.2）

| | 0.0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 静的な場合 | 0.332 | 0.310 | 0.255 | 0.190 | 0.132 | 0.0887 | 0.0586 | 0.0387 | 0.0258 | 0.0171 | 0.0120 |
| T＝0.5(S) | 0.3412 | 0.3191 | 0.2638 | 0.1981 | 0.1398 | 0.0956 | 0.0649 | 0.0444 | 0.0310 | 0.0222 | 0.0164 |
| T＝0.2(S) | 0.4210 | 0.3976 | 0.3390 | 0.2687 | 0.2050 | 0.1553 | 0.1190 | 0.0933 | 0.0747 | 0.0609 | 0.0502 |