III−14　熱伝導型圧密方程式と境界条件についての一考察

広島大学工学部　正　吉國 洋

1. まえがき

現在まで 数多くの圧密理論が提案されているが、それは幾つかの流れに分類する事ができる。先ず第1のグループは 熱伝導の問題に相似解析されたTerzaghiの一次元圧密理論に基礎を置くグループである。Terzaghi自身及びRendulicは一次元圧密理論を確たる根拠もなく ただ熱伝導論との対応に於いて 多次元の圧密理論へと拡張した。その拡張された圧密理論をもとにBarron Silveira Carrillo, その他の人々が個々に問題に解を与えた。第2のグループは音の伝播の問題に対応するBiotの三次元圧密理論に基礎を置くグループであり、やはりBiotその他の人々が個々の問題に解を与えている。第3のグループは Terzaghiの熱伝導型方程式が境界変位条件を含まない事に着目し全応力の変化を考慮に入れて圧密基礎方程式を導いたもので Gibson 赤井 等がこれに属する。それぞれのグループの圧密基礎方程式は次のようである。

Terzaghi 系　$\frac{\partial u}{\partial t} = c\nabla^2 u$　(1)

Biot 系　$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = c\nabla^2 \varepsilon$　(2)

Gibson，赤井 系　$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t} = c\nabla^2 u$　(3)

これらの理論は すべて弾性体の仮定を置いているために 実際の現象を完全に説明する事は出来なかった。そこで各々の立場に於いて 理論の修正が行なわれた。例えばTerzaghi系ではTaylorその他，Biot系では Biot，Tan 等，Gibson 赤井系では 赤井がこの問題を取扱っている。しかし非弾性体に対する圧密理論は非常に複雑困難な問題であって、本論文に於いてはひとまず前述の古典的圧密理論を比較し、特にTerzaghi理論の適用限界を明らかにする事を目的としたものである。

Terzaghiの多次元圧密理論は合理的でない面を指適されながらも 尚現在 実験室および現場に於いて使用され続けており、自然地盤の沈下及び間隙水圧の消失過程を解析するのに最も有力であるかのような印象さえ受ける。この理由はBiot系の方程式の解が実際使用するのに有効な形で示されていない事と 基礎方程式を直接比較することによって 基礎方程式の上での相違又は矛盾点が指適されていない事にある。

先に述べたようにTerzaghiの多次元圧密理論は熱伝導の問題との対応によって導かれたものであり そして 圧密に於ける水の流れは 熱伝導に於ける熱の流れに対応する。しかし圧密に於ける水の流れは体積力であるのに対し、熱伝導に於ける熱の流れは体積力ではない。この事が熱伝導と圧密が機構的に根本的に異る点である。又Terzaghiの多次元圧密理論の最も弱い点は 実際的に非常に重要な因子である境界の変位を考慮に入れて導かれたものでない事と将来とも変形の条件を入れ得ないところにある。この点Terzaghiの一次元圧密理論は変形条件を入れて導かれたものであり、Biotの一次元圧密方程式と本来等価なものである。この論文は Biot系の立場から圧密基礎方程式をTerzaghi の熱伝導型の方程式と比較し得る形で導き Terzaghiの方程式に附加されるべき項とその性質、及びTerzaghi の方程式とBiotの方程式が等価となる変形条件について討議したものである。

2. 圧密基礎方程式

圧密基礎方程式の誘導にあたって 土の特性を次のように仮定する。 (1)等方等質の弾性体である。(2)完全飽和である。(3)土粒子及び間隙水は非圧縮性である。(4)微少ひずみである。(5) Darcy's law が成立する。 これらの仮定は現実の土に対して満足されるものではないが 本論文が Ideal soil に対して導かれた各圧密理論の比較、特に Terzaghi 理論の妥当性を確める事を目的としているので、土の特性に対する討議は行なわない。

弾性学に於いてよく知られているように 体積力を含む変位に対する平衡方程式は Lamé の定数を用いて 次のように書ける。

$$\mu\nabla^2 q + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla q) + \Omega = 0 \tag{4}$$

ここに λ, μ は Lamé の定数であり、q, Ω は夫々変位及び体積力である。

$$q = U_x i + U_y j + U_z k$$
$$\Omega = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k \tag{5}$$

U_x, U_y, U_z は各方向の変位成分であり、u は間隙水圧である。

そこで(4)式の div をとり (5)式を考えると

$$(\lambda+\mu)\nabla^2(\nabla q) + \nabla^2 u = 0 \tag{6}$$

となり

$$\nabla q = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon \tag{7}$$

であるから

$$\nabla^2[(\lambda+2\mu)\varepsilon + u] = 0 \tag{8}$$

を得る。(8)式が示すように $(\lambda+2\mu)\varepsilon + u$ は調和関数であり、Laplace の方程式を満足している。又一般解は次のように示される。

$$(\lambda+2\mu)\varepsilon + u = c_1\varphi(r) + c_2 \tag{9}$$

ここに c_1, c_2 は積分定数である。

又 $\varphi(r)$ は

三次元の場合 $\varphi(r) = \frac{1}{r}$

二次元の場合 $\varphi(r) = \log r$

一次元の場合 $\varphi(r) = r$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

である。 (9)式を時間について微分すれば

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dc_1}{dt}\varphi(r) + \frac{dc_2}{dt} \tag{10}$$

となり

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = -\frac{k}{\gamma_w}\nabla^2 u$$

であるから(10)式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k(\lambda+2\mu)}{\gamma_w}\nabla^2 u + \frac{dc_1}{dt}\varphi(r) + \frac{dc_2}{dt} \tag{11}$$

となり 熱伝導型の基礎方程式と比較し得る形で 一般的圧縮方程式を求める事が出来た。

c_1, c_2 は境界の変位条件及び排水条件によって決まる定数である。(11)式の示す事は熱伝導型の圧密方程式が一般的には位置に関する項と位置に関係しない項を含まねばならないということである。

Terzaghi の圧密方程式は或る特殊な変形条件で $C_1 \equiv C_2 \equiv 0$ の場合に相当する。

今、$C_1 \equiv 0$, $C_2 \neq 0$ のケースについて更に議論を進めてみよう。このケースでは

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[(\lambda + 2\mu)\varepsilon + u\right] = 0$$

となる。これが成立する一般的条件を見出すに至っていないが、今後の問題として取扱っていく考えである。$C_1 \equiv 0$, $C_2 \neq 0$ とすれば (9)式は

$$(\lambda + 2\mu)\varepsilon + u = C_2 \qquad (12)$$

となり、これを土塊全体について積分すれば

$$\int_V \left[(\lambda + 2\mu)\varepsilon + u\right] dV = C_2 \int_V dV$$

$$C_2 = \frac{1}{V}\int_V \left[(\lambda + 2\mu)\varepsilon + u\right] dV = (\lambda + 2\mu)\,\bar{\varepsilon} + \bar{u} \qquad (13)$$

となる。ここに V は土塊の体積、$\bar{\varepsilon}$, $\bar{u}$ は夫々土塊全体の平均体積歪及び平均間隙水圧である。$C_1 \equiv 0$ 及び (13)式の関係を考えれば 圧密方程式(11)式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k(\lambda + 2\mu)}{\gamma_w}\nabla^2 u + (\lambda + 2\mu)\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} + \frac{d\bar{u}}{dt} \qquad (14)$$

となる。このケースの圧密がどのようなものであるかの具体例を次に示そう。

3. 鉛直等ひずみ条件のもとでの放射流れによる圧密の基礎方程式

円柱座標に於ける鉛直等ひずみ、放射流れの条件は $\frac{\partial U_r}{\partial z} = \frac{\partial^2 U_z}{\partial r \partial z} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ である。ここに U_r, U_z は夫々半径方向の変位および鉛直方向の変位であり (4)式は次のように書き表わされる。

$$G\left(\nabla^2 U_r + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - \frac{1}{r^2}U_r\right) + \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \qquad (15)$$

ここに G, ν は 夫々剪断弾性係数及びポアッソン比である。(15)式を変形すると

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_r)\right] + \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \qquad (16)$$

(16)式を r について2回積分すると C_1, C_2 を積分常数として次のようになる。

$$rU_r + \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\int ru\,dr + C_1 r^2 + C_2 = 0 \qquad (17)$$

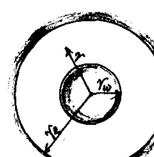
(17)式に境界変位条件を入れて C_1 を決定する。C_2 は以下の解析に必要ない。

今、サンドドレーンのケースを考えて 境界の変位を夫々 $U_{r(r_w)}$, $U_{r(r_e)}$ とすると

$$C_1 = -\frac{1}{r_e^2 - r_w^2}\left(r_e U_{r(r_e)} - r_w U_{r(r_w)}\right) - \frac{1-2\nu}{4G(1-\nu)}\bar{u} \qquad (18)$$

と決定される。(17)式は変形すると

$$U_r + \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\frac{1}{r}\int ru\,dr + C_1 r + C_2\frac{1}{r} = 0 \qquad (19)$$



更に(19)式を r について微分すると

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\left[u - \frac{1}{r^2}\int ru\,dr\right] + C_1 - \frac{1}{r^2}C_2 = 0 \qquad (20)$$

を得る。(19) 及び (20)を使って ε を書くと

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r}U_r + \frac{\partial U_z}{\partial z} = -\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}u + 2\left(\frac{r_e U_{r(r_e)} - r_w U_{r(r_w)}}{r_e^2 - r_w^2}\right) + \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\bar{u} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\\ &= \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}(\bar{u} - u) + (\bar{\varepsilon}_r + \bar{\varepsilon}_t + \bar{\varepsilon}_z)\end{aligned} \qquad (21)$$

$$\because \quad \frac{2(r_e U_{r(r_e)} - r_w U_{r(r_w)})}{r_e^2 - r_w^2} = \bar{\varepsilon}_r + \bar{\varepsilon}_t \quad , \quad \varepsilon_z = \bar{\varepsilon}_z$$

(20)式を　時間tについて微分し、$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{R}{\gamma_w}\nabla^2 u$ の関係を入れると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{R\,2G(1-\nu)}{\gamma_w(1-2\nu)}\nabla^2 u + \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} + \frac{d\bar{u}}{dt} \tag{22}$$

となり、結果的に(11)式を得ることになり、(11)式に於ける $C_1 \equiv 0$, $C_2 \neq 0$ のケースである。

一方において鉛直方向の有効応力 σ_z' を各方向のひずみで表現すれば、鉛直方向の全応力を σ_z として

$$\sigma_z' = \sigma_z - u = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\left\{\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1-\nu}{\nu}\frac{\partial u_z}{\partial z}\right\} \tag{23}$$

であり、(23)式に r を乗じて r_w から r_e まで積分すれば

$$\int_{r_w}^{r_e} r(\sigma_z - u)\,dr = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\left[(r u_r) + \frac{1-\nu}{2\nu}r^2\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]_{r_w}^{r_e}$$

となり、整理すれば

$$\bar{\sigma}_z - \bar{u} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\left(\bar{\varepsilon}_r + \bar{\varepsilon}_t + \frac{1-\nu}{\nu}\bar{\varepsilon}_z\right) \tag{24}$$

(24)式を時間tについて微分し　鉛直方向の平均全応力 $\bar{\sigma}_z$ は時間的に変化しないとすれば $\frac{d\bar{\sigma}_z}{dt} = 0$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + \frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)}\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} = -\frac{2G\nu}{1-2\nu}\frac{d}{dt}(\bar{\varepsilon}_r + \bar{\varepsilon}_t) \tag{25}$$

となる。　この関係を(22)式に入れれば

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2G(1-\nu)}{\gamma_w(1-2\nu)}\nabla^2 u + 2G\frac{d}{dt}(\bar{\varepsilon}_r + \bar{\varepsilon}_t) \tag{26}$$

を得た。(26)式は円柱又は円筒の鉛直等ひずみ条件のもとでの放射流れによる圧密方程式であるが、同様な変形条件のもとでの一次元圧密においても同様な方程式が得られる。(26)式によれば $\bar{\varepsilon}_r + \bar{\varepsilon}_t = 0$ の場合にTerzaghi型の方程式が成立し　(11)式に於ける $C_1 \equiv C_2 \equiv 0$ のケースである。　従ってBarronが自由ひずみと称して解を求めたものは　実は等ひずみ条件の解である。又よく言われるように等方圧密に於いては全応力が時間的に変化しないので　Terzaghi型の方程式が成立するとする議論は誤りであって、土塊全体については等方的応力で時間的に変化しないが、方程式が成立する微少要素について、等方応力状態が成立するのは限られた時間と限られた位置に於いてであって、一般には存在しない。　もし存在するとすれば grad $u = 0$ の場合であって、それはすでに圧密現象ではない

。

4. あとがき

以上Biot系の立場からTerzaghi型の圧密方程式が成立するための変形条件、含むべき項とその性質について検討してきたが、結論的に次のように推察される。

1.) 一次元及び二次元圧密に於いて　$\bar{\varepsilon}_r + \bar{\varepsilon}_t = 0$　即ち側方に境界が変位しない平面歪条件の場合にはTerzaghi型の圧密方程式が成立する。側方変位を許す場合には $\frac{d}{dt}(\bar{\varepsilon}_r + \bar{\varepsilon}_t)$ の項が加えらねばならない。

2.) 一般的には間隙水圧で表現された圧密方程式は(11)式で示されるようにTerzaghi型の方程式に位置に関係する項と位置に関係しない項が含まれねばならない。

3.) (11)式に於いて $C_1 \equiv C_2 \equiv 0$ のケースは内部的にはともかく土塊全体としては一次元的変形をする場合であり、$C_1 \equiv 0$, $C_2 \neq 0$ のケースは　土塊全体は三次元的変形をするが境界は平面変形をする場合、$C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ の場合はそれ以外のケースではないかと考えられる。これについては今後　研究を進めてゆく考えである。

以上