III−13　粒状体に統計力学的手法を適用する限界および意味

東京大学工学部 正員 最上武雄

1) 筆者は数年来、粒状体すなわち粒から出来ている物体の力学的特性を調べるのに統計力学的手法を導入することを研究して来た。このような研究は今の所他に誰れもやっていないし、筆者自身統計力学を専攻している者でもないのだから、理論の展開に際し充分注意しなければならないのは言うを俟たない、筆者は出来るだけ細心に考を巡らし、また他の人々の意見を出来る限り聞くよう努めている。 Berlin 大学の Rudehus は時々意見を寄せて呉れ又論文も書いている[1]。それに答える意味でも筆者が今迄に考えた事をまとめて置くことは無意味ではないと思っている。まず初めに、何のためにこのような研究をするかと言う問いに答えなければならないと思う。動機的に言えばこの研究は一種の好奇心から始っている。その意味ではいわば無目的である。しかし、傳統的な土質力学のように土を連続体と考える立場ではどうしても理解出来ない現象は可成りある。それらが土を粒状体として考えれば解決出来ると言う保証はないのだから、粒状体を考えることの終局的な意味は矢張りやって見なければ分からない。また実際問題の解決に対して有力な方法を提供し得るであろうか、これも当初には全然見通しがあった訳ではない。たゞ、いくらか進んで見て分ったのは少くともせん断特性を研究する手段として必ずしも棄てたものでもないこと[2]、変形の本質について示唆が得られることは間違いないことである。これらの方面で効果を発揮するためには、手法そのものに反省に反省を加え、よって立つ所を明確にして行かなければならないのでまだ多くの努力の余地が残されている。

2). エントロピーの表現について

熱力学では、エントロピーなる量が重要な役をする。この量の定義を情報理論的考察により与えることは新しい傾向のようである[3]。さて、定まった容積の中に定まった数の粒子が入っている粒状体は数多くある。ある容積にいくつかの粒子を入れる。そして粒子の位置を色々に変えたものが、それ等に当る。それらの1つ1つを粒状体の状態と称して $A_1, A_2, \cdots, A_n$ であらわす。言いかえると、定まった間げき比を持つ粒状体は $A_1, A_2, \cdots, A_n$ と云う状態に対応している。このような粒状体があった時、その状態が $A_1, A_2, \cdots, A_n$ のどれになっているかは分からない。一方状態が A_1 である確率 $P(A_1)$, A_2 である確率 $P(A_2), \cdots$ などを考えることが出来る。粒状体が $A_1, A_2, \cdots A_n$ のどの状態にあるかは上述のように分からないのだが、その不確かさを数であらわすとして、この不確かさを示す数 U は $P(A_1), P(A_2), \cdots, P(A_n)$ の函数である。例えば A_1 の状態で各粒子を結合して動かないようにしてあるとするならば、粒状体は A_1 の状態以外には有り得ないが、その時には、
$P(A_1)=1,\ P(A_2)=0,\ P(A_3)=0,\ \cdots, P(A_n)=0$ である。従って $P(A_i), (i=1,2,\cdots,n)$ の値を知った時（そのような情報を持った時） $P(A_i)$ の函数として U が求められるようにしておけば、粒状体の状態の不確かさを数であらわすことが出来る。それでは、$P(A_i)$ の函数として如何に U を定義すれば良いであろうか、 Shannon は

(i)　$U = U\{P(A_1), P(A_2), \cdots, P(A_n)\}$　(1)

(ii)　$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)$ であれば $U=f(n)$ で f は n の単調増加函数である。

(iii) AとBを二つの互いに独立な事象でありとし、それらを組合せた事象をC、つまり$C=A\cap B$（AとBとが同時に起る）、とした時Cの不確かさはAの不確かさとBの不確かさの和である。すなわち

$$A\cap B=C \quad \text{であれば} \quad U(C)=U(A)+U(B) \tag{2}$$

(4) Uの値は、Uを求める方法に関係しない

と言う4條件にUは従うとしたのである．このような定義から$P(A_1)$, $P(A_2)$, ----, $P(A_n)$ が等しい場合には

$$U=-K\log p(A_i) \tag{3}$$

が得られ、$P(A_1)$, $P(A_2)$, ……, $P(A_n)$ が必ずしも等しくない時には

$$U=-K\sum P(A_i)\log p(A_i) \tag{4}$$

であると言える．(4)は(3)を特別な場合として含んでいるから(4)を一般のUの形として良い．(4)が最大となるのは$P(A_1)=P(A_2)=\cdots\cdots=P(A_n)=1/n$ の時である．この情報理論に於けるエントロピーは熱力学に於けるエントロピーと同様の性質を持っている．

一方粒状体のあつかいで筆者はエントロピーとして、

$$S=\frac{K}{N}\log \varpi \tag{5}$$

但し、ϖは状態A_1, A_2, ……, A_n の総数nに当る．を採用した．このことは当時自分でも本当に良いかどうかの確信はなかった．たゞこれを正しいと仮定して進んで見て矛盾が起るかどうかやって見ると言う立場をとっていた．其後学び得たことおよび考慮の結果得たことによると、エントロピーを状態の確率によって現わすことそのことは、現象が非可逆であったとしてもおかしくはない．つまり、(4)の形にエントロピーを書けば良い．たゞ問題は$P(A_1)=P(A_2)=\cdots\cdots=P(A_n)$と考えて良ければエントロピーを(5)の形に書き得るのであるが、これについて次ぎに考察する．

3) 状態の確率について

一般に粒子の在り方の確率がエントロピーの値をきめる．気体運動論で考えているような気体分子の在り方を考えると、初めにどんな位置にあったとしても放置すれば互いの衝突によって次第に一様に近づく．勿論一様の状態そのものではなく、一様に近い状態の近くのあらゆる状態をとり得るようになるであろう．従って粒子のとり得るあらゆる状態の確率は等しいとしても良いであろう．その故に、この場合のエントロピーは(3)の形をとって良い．粒状体の場合の粒子についてはどのように考えれば良いであろうか．砂や礫のような実際の粒状体ではなく甚だしくモデル化したものではあるが、等径の鋼球のあつまりに関する観察の結果[5]は、このような考察に対して可成り役に立つ．

モデル化した粒状体の圧縮の場合に、圧縮にともなう間げき比の変化、間げき比の散りの変化を調べて見ると、圧縮にともなって、間げき比(e)も間げき比の散り(δ)も一定値に近づく．間げき比の散り(δ)は必ずしも0ではないから粒状体は完全に一様になる訳ではないが、δの値は可成り小さい．要するに初めの状態は相当不均一であったとしても圧縮が進むにつれて一様化の方向に進むことは間違いない．この場合どのような現象が起るかと言えば、粒子の相互位置が変り、途中粒状体内で滑り線が生ずることもあり、又時には出来た滑り線が消失することもある．粒子間の摩擦が大きい時には滑り線の消失は起り難い．いづれにしても粒相互の位置変化に対する自由さが大きい程、より一様

に近づくだろう．又初めの状態が一様に近い程最後に到達する一様性は大きい筈である．このような最後に到達する一様性に程度の差を生ぜしめるものは，粒子間又は粒子と容器との間の摩擦などであろう．原理的に考えれば摩擦などの作用について若し仮りに完全な知識があったとすれば（完全な情報を持っていれば）(4) の形のエントロピーが具体的に求められる．今 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ と言う状態が一様に近いものから一様に遠いものまで順序良く並んでいるとしよう．一様に近づき易い粒状体では $p(A_i)$ の i の若いもの程 1 に近いだろう．(4) の形のエントロピーは (3) の形のエントロピーを状態の確率を重率（weight）として一般化したものと考えられるから，摩擦のある系の特長としては各状態に与えるべき重率が等しくないと言うことが本質的なものと考えて良いであろう．粒状体の場合にこの重率を求める方法は現在は分かっていない．原則的に言えば，例えば上に引用した Shannon のエントロピーに関する4つの要請に類するものを仮定して (4) に依ってエントロピーを求め，それから出て来る macro の諸関係を実験的に検証して行くと言う方向が正道であろう．

筆者がこれ迄にとって来た筋道ではエントロピーとして (5) を採用して来たが，(5) は (3) と同じことである．従って状態についての重率は等しいとしているのである．$A_1, A_2, \cdots, A_n$ の状態に対する確率が等しいと考えて良いかも知れないと思われる場合もあるので，その場合について論ずるならば筆者の今迄の論法はおかしくないと思う．その場合とは Roscoe, Wroth, Schofield などの言う所の critical state である[5]．これはせん断試験を行ったとき可成りの変位が生じて，せん断応力が殆ぼ一定になった辺りである．実際の粒状体についての測定は不可能であるけれども，モデル化した粒状体についての測定では，先きに述べたように，間げき比 e およびその散ばり s は変形が進むにつれて殆ぼ一定となる．そのような状態に於ても粒状体は一定の状態にあるのではなく，可能な色々の状態を経巡ぐっているのであるが，e, s が殆ぼ一定と言うことは，とり得る状態の巾が狭くなると言うことである．言葉を変えれば，粒状体内の粒子は比較的狭い範囲内で一種の揺れ動きを行っているに過ぎないと言えるかも知れない．Rowe の行った実験[6]でも試料の崩壊の時には $\sigma_1 = \sigma_3$ になったとあるが，$\sigma_1 = \sigma_3$ であれば流体的だと言うことで粒の動きが流体の分子の動きに似て来たのだと言えぬでもない．これらの事を考えれば critical state 附近では筆者のこれまでの論法は少くとも近似的にはおかしくないと言えそうである．それでは critical state よりずっと前はどうだと言うことについては現在何とも言えないが，粒状体の状態の確率の遷移し方を更に研究しなければなるまいと思っている．

4)　$(e, s) \rightarrow (e, \gamma)$ の変換について

e, s を粒状体をあらわす二つの変数であると筆者は考えて来たものの，初めから多少の疑問がなかった訳ではない．連続体内の応力状態は6つの応力成分であらわされるし，応力そのものはテンソル量である．ひずみ，も同様である．しかし，e と s とでは二つしか変数はないし，しかも共にスカラー量である．これらの対応をどのように考えるべきであろうか．応力成分そのものを考えるかわりに塑性ポテンシャルとエントロピーとの対応を考えれば都合が良いと思った．そして当時は critical state を考える意味に思い至ってはいなかったが，yielding を考えれば応力成分そのものではなく，応力の不変量を考えれば良く，三次の不変量は大して意味を持たないとして良いから一次の不変量すなわち平均圧力と二次の不変量すなわち octahedral stress とを考えれば，変数の対比は2対2とな

つて都合が良いと思っていた。しかし、e, s の e の方は良いとしても s の方はどうも困る。そこで直観的考察から、(5) の記号を用いて

$$\log \varpi = F(e - k\gamma) \tag{6}$$

のようになっているとし、良いか悪いかは実験による結果の検証にまつことにした。その中 critical state の意味に考え及ぶにつれて critical state についてはむしろ critical state に於ける条件，これは実験的事実である，によって論議を進める方が良いと思うようになった．

$$S(e, s) = K\left\{(1+e)\log(1+e) - e\log e - \frac{s}{2e(1+e)}\right\} \tag{7}$$ [7]

として，三軸試験の場合について，critical state の条件[8] つまり $q = Mp$; q はせん断応力，p は平均圧力，M は定数；から，γ を critical state よりのせん断ひずみとして

$$S(e, s) \equiv G(\log v, \gamma) \equiv G(u, \gamma) \tag{8}$$

$$v = 1 + e, \qquad u = \log v \tag{9}$$

を求めて見る．

$$p\frac{de}{1+e} + \frac{1}{3}q\,d\gamma = \frac{\partial G}{\partial u}\frac{de}{1+e} + \frac{\partial G}{\partial \gamma}d\gamma \tag{10}$$ [9]

より

$$p = \frac{\partial G}{\partial u}, \qquad \frac{1}{3}q = \frac{\partial G}{\partial \gamma} \tag{11}$$

$q = Mp$ より

$$3\frac{\partial G}{\partial \gamma} = M\frac{\partial G}{\partial u} \tag{12}$$

これより

$$G = G\left(u + \frac{1}{3}M\gamma\right) \tag{13}$$

(8)，(13) を組合せ $\gamma = 0$ の時 $s = s_0$ とおき G を定め，(11) から p，q を求めると

$$\left.\begin{aligned} p &= \left[\frac{dG}{du}\right]_{\gamma=0} = K(1+e)\left[\log\frac{1+e}{e} + \frac{s_0(1+2e)}{2e^2(1+e)^2}\right] \\ q &= 3\left[\frac{dG}{d\gamma}\right]_{\gamma=0} = Mp \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

これが critical state に於ける p，q として求められたものである．p を e に対して図示して見ると実験値としての p が計算から出した値よりも可成り大きく出るので，そのことについてはまだ良く考えて見なければならない．

参考文献

1) G. Gudehus : Gedanken zur statistischen Bodenmechanik, Bauingenieur, 43 Jahrg. (1968), Heft 9, S. 320〜326

2) 例えば 最上武雄：礫の内部摩擦角と常数 k について，土と基礎，16巻11号，1968
Mogami, T., Yoshikoshi, H., : On the Angle of Internal Friction of Coarse Material, Proc. 3rd Budapest Conf. S.M.F.E., 1968 など

3) 小野周：熱力学 I，岩波講座 基礎工学 8

4) T. Mogami, G. Imai : On the Failure of the Granular Material, Soil and Foundation, Vol. VII, No. 3, 1967.

5) A. Schofield, P. Wroth : Critical State Soil Mechanics, McGRAW-HILL, 1968

6) P.W. Rowe : The Stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact, Proc. Royal Society London, Series A., Vol. 269, P.500

7) 例えば T. Mogami, A Statistical Theory of Mechanics of Granular Materials, Journ. Faculty of Eng. Univ. of Tokyo (B), Vol. XXVIII, No. 2, 1965 の (24) 式

8) A. Schofield, P. Wroth 前出

9) T. Mogami, Angle of Internal Friction of The Granular Material and a Simple Transient Phenomenon, Trans. J.S.C.E., No. 128, April, 1966