

北海道大学工学部 正員 工修 高 桑 哲 男

1. はじめに

配水管網流量計算の目的は、節点取出し水量と節点エネルギー位を結びつけて流量変動あるいは水圧変動に対処するための方策を見出すことにあるといえよう。

従来用いられてきた管網流量計算法は、管内流量を未知数として管内流量を求め、付随的に管路の損失水頭を求めるものである。この方法においては、肝じんな節点取出し水量とエネルギー位が計算式の表面には現れてこないで、(1)取出し水量の変動に対しては仮定流量値を全面的に変更し直さねばならず(合田・雄倉¹⁾の方法および扇田²⁾の方法においてはこの欠点は除かれるが、式数が管路数に等しくなるので大規模管網には不適である)、(2)エネルギー位を求めるためには管路接続状態を表現するための多大な入力データを与える必要があり、また(3)エネルギー位を望ましい値に保つための増・減圧あるいは管径変更などは直接的に計算ができず、反復計算によらねばならない。このような難点をもっているために、流量を未知数とした計算法に関する研究は、計算法自体に関する改良までで終わってしまい、配水管網コントロールへまで応用発展できなかったものと思われる。

節点エネルギー位を未知数とした計算法は、節点における流量の連続条件を満足させるエネルギー位を求めるものであって、節点取出し水量とエネルギー位が計算式中に現れるので上記のような難点を解決することが可能となる。この計算法については、すでに Marlow³⁾ その他と高橋・十時⁴⁾の論文が発表されているが、これらは反復近似法によって連立高次方程式を1次化して解くものであり、計算法上改良の余地を残しているとともに、本法のもつ意義については論じられていない。

2. 流量と節点エネルギー位の関係

平均流速公式として Hazen-Williams 公式を採用すれば、1本の管路の流量と損失水頭は

$$Q = 278.53 C D^{2.63} H^{0.54} L^{-0.54} \quad \dots\dots\dots (1)$$

なる関係にある。ただし、 Q = 流量 [l/sec], C = 流速係数, D = 直径 [m], H = 損失水頭 [m], L = 管路長 [m] である。節点 i と j を結ぶ管路に対して添字 (i, j) を付加すると

$$Q_{ij} = 278.53 C_{ij} D_{ij}^{2.63} H_{ij}^{0.54} L_{ij}^{-0.54} = K_{ij} H_{ij}^{0.54} = K_{ij} (E_i - E_j)^{0.54} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{となる。ただし, } K_{ij} = 278.53 C_{ij} D_{ij}^{2.63} L_{ij}^{-0.54} \quad \dots\dots\dots (3) \quad H_{ij} = E_i - E_j \quad \dots\dots\dots (4)$$

であり、 E_i, E_j はそれぞれ節点 i, j におけるエネルギー位 [m] である。式-(2)における $(E_i - E_j)$ と Q_{ij} の正負が一致するようにすると、

$$Q_{ij} = K_{ij} |H_{ij}|^{-0.46} H_{ij} = K_{ij} |E_i - E_j|^{-0.46} (E_i - E_j) \quad \dots\dots\dots (5)$$

式-(5)は H または E に関する非線形式であるから、特線にて近似することにする (Newton 法)。

Q_{ij}, H_{ij}, E_i に対する仮定値または近似値をそれぞれ q_{ij}, h_{ij}, e_i とし、その補正値をそれぞれ $\Delta Q_{ij}, \Delta H_{ij}, \Delta E_i$ にて表わすと、

$$Q_{ij} = q_{ij} + \Delta Q_{ij} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$H_{ij} = h_{ij} + \Delta H_{ij} \quad \dots\dots\dots (7) \quad E_i = e_i + \Delta E_i \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。式-(4), (7), (8) から次のようにも書かれる。

$$\begin{aligned}\Delta H_{ij} &= H_{ij} - h_{ij} = E_i - E_j - (e_i - e_j) \\ &= \Delta E_i - \Delta E_j \quad \dots\dots\dots (9)\end{aligned}$$

とも書かれる。 Q_{ij} を H_{ij} または E_i, E_j について微分すると

$$\frac{dQ_{ij}}{dH_{ij}} = 0.54 K_{ij} |H_{ij}|^{-0.46} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\begin{aligned}dQ_{ij} &= \frac{\partial Q_{ij}}{\partial E_i} dE_i + \frac{\partial Q_{ij}}{\partial E_j} dE_j \\ &= 0.54 K_{ij} |E_i - E_j|^{-0.46} (dE_i - dE_j) \quad \dots\dots\dots (11)\end{aligned}$$

となり、 $h_{ij} = e_i - e_j$ なる近似値に対して $\Delta H_{ij} = \Delta E_i - \Delta E_j$ なる補正を行なったときの流量 Q_{ij} の増分は次のように書くことができる。

$$\Delta Q_{ij} = 0.54 K_{ij} |h_{ij}|^{-0.46} \Delta H_{ij} = 0.54 K_{ij} |e_i - e_j|^{-0.46} (\Delta E_i - \Delta E_j) \quad \dots\dots\dots (12)$$

式-(12)を式-(6)に代入すると結局次式が得られる。

$$Q_{ij} = q_{ij} + 0.54 K_{ij} |e_i - e_j|^{-0.46} (\Delta E_i - \Delta E_j) \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\text{または } Q_{ij} = q_{ij} + 0.54 K_{ij} |e_i - e_j|^{-0.46} \{ (E_i - E_j) - (e_i - e_j) \} \quad \dots\dots\dots (14)$$

以上の関係を図示すると、図-1のごとくである。

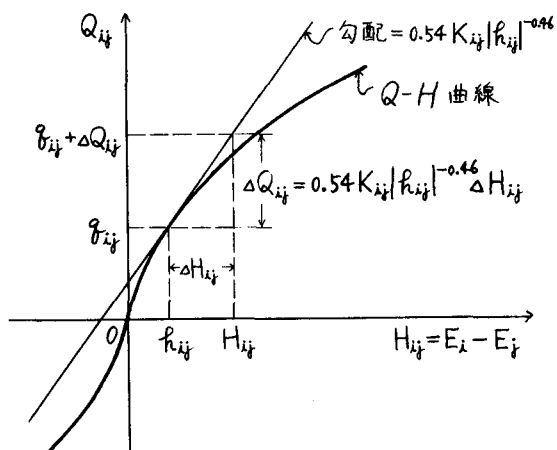


図-1 接線近似における流量と損失水頭の関係

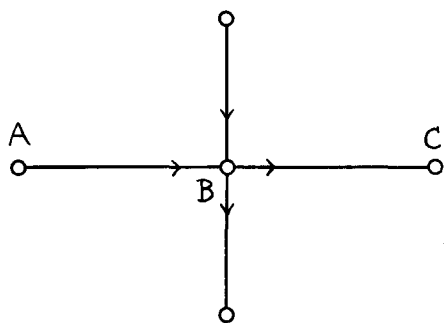
3. 計算式の誘導

位置、圧力、速度水頭をそれぞれ Z, P, V にて表わすと、エネルギー位 E および動水位 G は

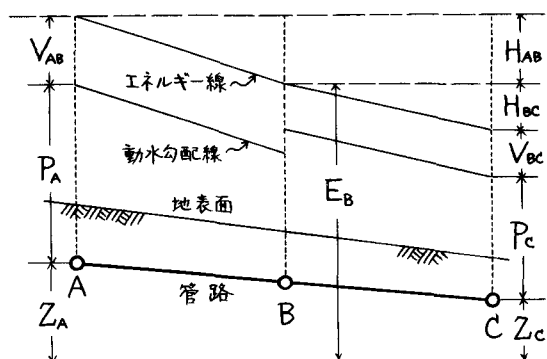
$$E = Z + P + V = G + V, \quad G = Z + P = E - V$$

と書かれる。図-2(a)のごとく配置されている管路A-B-Cの諸水頭の関係を図示した例が図-2(b)である。ここで注目すべきは、節点Bにおいては動水勾配線が不連続になっていることである。実際の流れにおいては、エネルギー線、動水勾配線とも連続なはずであるが、管網流量計算においては摩擦以外の諸損失水頭を無視することおよび節点における速度水頭が不明確なことによってこのような不合理が生ずる。

上記理由により節点における動水位が定義されないことから、本研究では動水位の代りにエネルギー位を用いている。ただし、動水位とエネルギー位の差は高々50 cm程度と推定されるから、実際問題としては、エネルギー位 $\equiv$ (圧力水頭+位置水頭)とみなしても差しつかえないであろう。



(a) 管路配置図



(b) 諸水頭図

図-2 諸水頭の関係

管網流量計算において満足されるべき水理学的条件は(A)各節点における流量の連続条件と(B)各閉管路における損失水頭の閉合条件である。節点エネルギー位を未知数とした計算法では、節点エネルギー位の仮定値または修正値に対して直ちに(B)の条件は満足されることから、(A)の条件のみが満足されるまで修正計算を繰返せばよい。

以下の説明において、式を簡略化するために次のような表示を用いることにする。

$$K_{ij}|e_i - e_j|^{-0.46} = S_{ij} \dots (15)$$

$$(S_{ij} + S_{ik} + \dots + S_{in}) E_i - S_{ij} E_j - S_{ik} E_k - \dots - S_{in} E_n = S E(i; j, k, \dots, n)$$

$$(S_{ij} + S_{ik} + \dots + S_{in}) \Delta E_i - S_{ij} \Delta E_j - S_{ik} \Delta E_k - \dots - S_{in} \Delta E_n = S \Delta E(i; j, k, \dots, n)$$

$$(S_{ij} + S_{ik} + \dots + S_{in}) e_i - S_{ij} e_j - S_{ik} e_k - \dots - S_{in} e_n = se(i; j, k, \dots, n)$$

図-3に示すような単点注入、2閉管路、7節点の管網について考えよう。図中の○印内数字は節点番号、管路に付した矢印は計算上基準となる流向、 p_i は節点*i*からの取だし水量〔ℓ/sec〕である。

節点数は7個であるが、節点取だし水量の総和は管網への流入量に等しい、すなわち

$$Q_{01} = p_1 + p_2 + \dots + p_7 \dots (16)$$

なる関係が成立することから、自由度が1だけ減少して(節点数-1)=6個の節点における流量の連続条件が成立すればよい。節点1についての条件を除くことにすると次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} Q_{12} &= Q_{25} + p_2, & Q_{13} &= Q_{34} + Q_{36} + p_3, & Q_{34} &= Q_{45} + p_4, \\ Q_{25} + Q_{45} &= Q_{57} + p_5, & Q_{36} &= Q_{67} + p_6, & Q_{57} + Q_{67} &= p_7 \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

式-(14)なる接線近似を式-(17)に代入して整理すると次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} SE(2; 1, 5) &= -0.85 se(2; 1, 5) - 1.85 p_2, & SE(3; 1, 4, 6) &= -0.85 se(3; 1, 4, 6) - 1.85 p_3, \\ SE(4; 3, 5) &= -0.85 se(4; 3, 5) - 1.85 p_4, & SE(5; 2, 4, 7) &= -0.85 se(5; 2, 4, 7) - 1.85 p_5, \\ SE(6; 3, 7) &= -0.85 se(6; 3, 7) - 1.85 p_6, & SE(7; 5, 6) &= -0.85 se(7; 5, 6) - 1.85 p_7 \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

図-3のような単点注入においては、配水池水位が既知であることと式-(16)の関係によって E_1 の値が決まってしまう。したがって、 $E_1 = e_1$ は既知となって、式-(18)は $E_2, E_3, \dots, E_7$ なる6個の未知数に対して方程式が6本あるから解ける。仮定値 e_i および S_{ij} から出発して連立1次方程式を解いて E_i を求め、各節点における流量の連続条件が満足されないときは、 E_i を近似値 e_i において再び同じ手順を繰返す。一方、式-(13)の関係式を式-(17)に代入して整理すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} S \Delta E(2; 1, 5) &= -1.85 \{ se(2; 1, 5) + p_2 \}, & S \Delta E(3; 1, 4, 6) &= -1.85 \{ se(3; 1, 4, 6) + p_3 \}, \\ S \Delta E(4; 3, 5) &= -1.85 \{ se(4; 3, 5) + p_4 \}, & S \Delta E(5; 2, 4, 7) &= -1.85 \{ se(5; 2, 4, 7) + p_5 \}, \\ S \Delta E(6; 3, 7) &= -1.85 \{ se(6; 3, 7) + p_6 \}, & S \Delta E(7; 5, 6) &= -1.85 \{ se(7; 5, 6) + p_7 \} \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

ここで $\Delta E_1 = 0$ であって、未知数は $\Delta E_2, \Delta E_3, \dots, \Delta E_7$ の6個である。

4. 連立1次方程式の解法

上述の2つの連立1次方程式による方法は、いずれもその次元数が流量条件を満たすべき節点数に

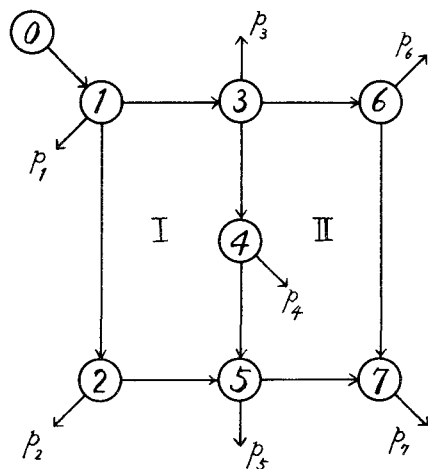


図-3 説明のための管網図

等しくなるから、直接解法によって解くのでは大規模管網に対して計算機の容量不足および解の精度が落ちるおそれがある。そのような場合の解決法としては、係数が0である項が多く含まれる連立1次方程式を対象とするいまの場合は特に、Gauss-Seidel法と反復代入法により代表される反復近似解法と還元解法の利用が考えられる。

Gauss-Seidel法と反復代入法を比較すると、計算の便宜上および収束性において後者の方がすぐれている。本研究では、反復代入法を有限回反復する第3法と、各方程式の(左辺-右辺)の差が所定の値以下となるまで反復する第4法についての計算結果を示す。

還元解法とは、一連の還元過程によって連立1次方程式の次元数を減少させた上で直接解法によって解くものであって、係数が0である項を多く含む連立1次方程式の解法として有効である。

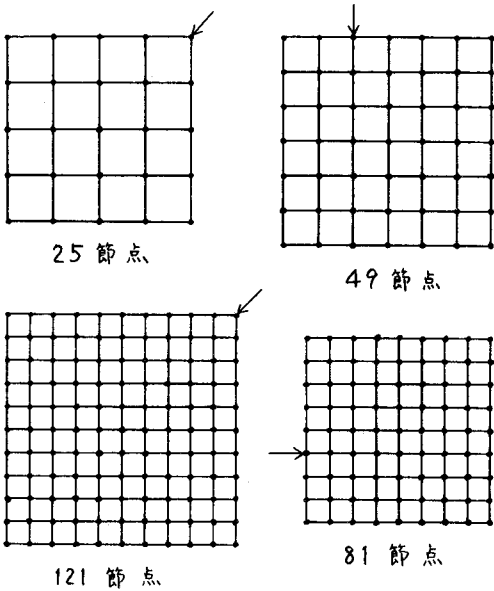


図-4 計算例に用いた管網の骨組図

5. 計算例

図-4のごとき骨組をもつ節点数25, 49, 81, 121の管網に対して、式-(19)による方法を用い、反復近似計算第3法、第4法および還元解法を適用した場合の繰返し演算回数、計算時間をそれぞれ表-1, 2に示す。ただし、流量閉合条件の許容誤差は0.01 l/secとした。なお計算はNEAC 2203Gによった。

6. 結 び

節点エネルギー位を未知数とした管網流量計算法として、接線近似により式-(18)および(19)を誘導した。また作成された連立1次方程式の解法としては還元解法が有効であることを示した。本法によると、(1)節点エネルギー位が直接求められ、(2)節点取出し水量の変動に対処できるというほかに、配水コントロールのための計算法として、従来の流量を未知数とした計算法にはできなかった応用計算が可能となると考えられる。

表-1 繰返し演算回数(下段は最終閉合誤差: l/sec)

解 法	節 点 数 (下段は初期閉合誤差: l/sec)			
	25 (17.2827)	49 (63.4651)	81 (13.8414)	121 (27.3519)
還 元 解 法	3 回 (0.0006)	4 回 (0.0001)	4 回 (0.0002)	4 回 (0.0000)
反復近似計算 第3法 ^a	19 (0.0086)	22 (0.0094)	32 (0.0079)	52 (0.0094)
反復近似計算 第4法	4 ^b (0.0088)	37 ^c (0.0097)	— ^{b,d}	5 ^b (0.0081)

- a. 反復回数は5回。
- b. 反復計算打ち切り誤差は0.01 l/sec。
- c. 反復計算打ち切り誤差は0.001 l/sec。
- d. 計算続行に多大な時間を必要とした。

表-2 計算時間(分)

解 法	節 点 数			
	25	49	81	121
還元解法	4	6	11	16
第3法	9	10	41	45
第4法	5	14	—	34

参考文献: 1) 合田・雄倉; 土木学会論文集, 第138号。2) 扇田; 京都大学学位論文(1955)。3) Marlow, et al.; Proc. ASCE, Vol. 72, No. HY4。4) 高橋・十時; 水協誌, 第399号。5) 高桑; 水協誌, 投稿中。6) 高桑; 第20回全国水造研究発表会講演集, p. 58。