

建設省土木研究所 正員 富永正昭

〃 〃 坂本忠彦

〃 〃 折敷秀雄

1. まえかき、不圧地下水の運動に関しては、既に多くの実測値の解析および理論的研究がある。しかしこれらの研究は地下水の運動が非常に緩慢であるとして、鉛直方向の運動を無視、あるいは水平方向の加速度項を無視して検討されたものである。本論文では不圧海岸地下水の運動を潮位変動(長周期の波)に伴って減衰しながら伝播する空隙構造物内の波の運動としてとらえ、基礎方程式を摂動法を用いて展開し、そのオー近似的解を求めた。その解と従来の理論解との比較検討結果および長崎外港における海岸地下水の水位変動実測値を解析した結果について報告する。

2. 基礎方程式、Fig 1 の様に座標軸を定める。半無限に広がる透水性係数、空隙率 λ の透水層の一端が平均水深 H なる水域に接しており、不透水層が平均水面下 $z=-H$ の深さにあるものとする。水域の水面が $\xi = ae^{i\omega t} - a \cos \omega t \dots\dots\dots (2-1)$

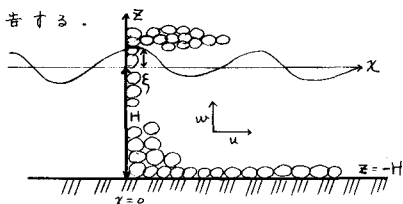


Fig 1. 不圧海岸地下水の模式図

(以下必要な場合は実数部分をとるものとする。)の様に振動す

る場合、その影響を受けて x 方向の正の方向に伝播する波の運動を調べることにする。断面平均流速を u, w とし、透水層内の波の運動に関して(2-2)および(2-3)式で表わされる速度ポテンシャルの存在を仮定する。 φ は通常の透水流の場合と異り、時間項を含むことは明らかである。

速度ポテンシャル $u = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \dots\dots\dots (2-2)$, $w = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} \dots\dots\dots (2-3)$, 連続式 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (2-4)$

運動方程式 x 方向: $\lambda \frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\lambda}{k} q \dots\dots\dots (2-5)$ z 方向: $\lambda \frac{\partial w}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\lambda}{k} q \dots\dots\dots (2-6)$

(2-2), (2-3), (2-5) および (2-6) 式より (2-7) 式が得られる。 $-\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\lambda}{k} q - \lambda p \dots\dots\dots (2-7)$

境界条件としては自由表面の連続式, $\frac{\partial \xi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{w}{\lambda} \dots\dots\dots \text{at } z = \xi \dots\dots\dots (2-8)$

自由表面の圧力条件, (2-7) 式において $p = 0$ $-g\xi + g\varphi + \frac{\lambda}{k} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots \text{at } z = \xi \dots\dots\dots (2-9)$

底面の境界条件, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots \text{at } z = -H \dots\dots\dots (2-10)$

水域との連続条件, $\xi = ae^{i\omega t} \dots\dots\dots \text{at } x = 0 \dots\dots\dots (2-11)$

水域との連続条件としては、さらに流量の連続条件、圧力条件などが考えられる。これらの条件について検討したか、不圧海岸地下水の場合水位の連続条件で充分であるようである。

3. 基礎方程式の摂動法による線形化。摂動法で解くものとし解の形を次の様に仮定する。

ここに α は小さなパラメータとする。

$$\varphi = \alpha \varphi_1 + \alpha^2 \varphi_2 + \dots\dots\dots (3-1)$$

$$\xi = \alpha \xi_1 + \alpha^2 \xi_2 + \dots\dots\dots (3-2)$$

$$p = p_0 + \alpha p_1 + \alpha^2 p_2 + \dots\dots\dots (3-3)$$

$$u = \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots\dots\dots (3-4)$$

$$w = \alpha w_1 + \alpha^2 w_2 + \dots\dots\dots (3-5)$$

φ は次の条件を満足することは容易にわかる。

$$\nabla^2 \varphi_1 = \nabla^2 \varphi_2 = \dots\dots\dots = 0 \dots\dots\dots (3-6)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \dots\dots\dots = 0 \quad \text{at } z = -H \dots\dots\dots (3-7)$$

(2-7)式を2のorderにより整理すると

$$\alpha[0]; P_0 = -\rho g z \dots\dots\dots \text{圧力の } \alpha \text{ の近似} \quad \alpha[1]; \frac{P}{\rho} - g\eta + \frac{k}{\lambda} \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots (3-8)$$

(2-8)および(2-9)式の $\alpha[1]$ のorderは

$$\alpha[1]; \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{g}{\lambda} \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad \text{at } z=0 \dots\dots\dots (3-9) \quad \alpha[1]; -g\eta + g\eta + \frac{k}{\lambda} \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad \text{at } z=0 \dots\dots\dots (3-10)$$

(3-9)および(3-10)式より η を消去すると次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{g}{k} \frac{\partial \eta}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z=0 \dots\dots\dots (3-11)$$

(3-6), (3-7)および(3-11)式が η の満足すべき条件であり、 η が求まると順次近似を高めてゆけばよいが、この種の問題では $\alpha[1]$ の α 1近似で充分であろう。

4. 基礎方程式の解 η はlaplaceの方程式の解であり、時間項は(2-1)式を参照して $e^{i\omega t}$ を選ぶことにすれば、 η は次の様な形をもちであろう。

$$\eta = (Ae^{ikx}, e^{kz} + Be^{-ikx}, e^{kz} + Ce^{ikx}, e^{-kz} + De^{-ikx}, e^{-kz}) \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots (4-1)$$

(i), $z = -H$ での条件, (3-7)式を参照すると, $A = Ce^{2kH}$, $B = De^{2kH} \dots\dots\dots (4-2)$ が得られる。

(ii) 表面条件, (3-11)式は空隙構造物内の線型抵抗を受けて進行する波を考える場合の重要な基礎式である。通常の波の微小振幅波理論による表面条件 $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + g \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z=0 \dots\dots\dots (4-3)$

と比較すると $\frac{g}{k} \frac{\partial \eta}{\partial t}$ という項を余分に含んでいることがわかる。(3-11)式に(4-1)および(4-2)式を代入すると若干の変形ののち(4-4)式が得られる。

$$(\partial^2 - i\frac{\omega}{k}g) \cosh(kr + i k_i) H = g(kr + i k_i) \sinh(kr + i k_i) H \dots\dots\dots (4-4)$$

ただし k_i は複素数であり、 $k_1 = kr + i k_i$ とする。

ω と k_i との関係はこの式を解くことによって得られる。 $\lambda = 1$, $k \rightarrow \infty$, すなわち抵抗を受けない場合には、通常の波のwave numberを求める式

$$\partial^2 \cosh kH = g \sinh kH \dots\dots\dots (4-5) \text{と一致することは明らかである。}$$

(4-4)式をrealおよびimaginary partに分割すると次式が得られる。

$$\partial^2 + \partial \frac{g}{k} \tanh kr H \tan k_i H = g r \tan k r H - g k_i \tan k_i H \dots\dots\dots (4-6)$$

$$- \partial \frac{g}{k} g + \partial^2 \tanh kr H \cdot \tan k_i H = g r \tan k_i H + g k_i \tanh kr H \dots\dots\dots (4-7)$$

$k = kr + i k_i$ はこの2つの方程式を満足する kr , k_i を求めればよく、後に述べる様な適当な近似解を代入して、くり返し計算を行えばよく、電子計算機を用いれば容易に求まる。

(iii), (4-4)式の解の一意性。複素関数論によれば(4-4)式は2つの解をもちことは容易にわかる。

そしてその1つの解を $k_1 = kr + i k_i$ とすると、 $-k_1 = -kr - i k_i$ も2解であることがわかる。 k_1 および $-k_1$ はおのおのx軸を正および負の方向に伝播する同一の波を表わしており、複素数で表示したwave number k_1 は一意的に求まることがわかる。

Fig 1 に示した様に $kr > 0$ の時 x軸を正の方向に伝播する時波動は減衰するであろうから、 $k_i < 0$ となることか予想され、 $x \rightarrow \infty$ の時 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{i k_i x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-k_i x}$, $e^{i k_i x}$ は発散するため $A = C = 0$ としなければならぬ。

(iv) $x = 0$ における境界条件。以上の結果より新らしく常数Eを導入して

$$\eta = E \cosh k_1 (H + z) e^{i(\omega t - k_1 x)} \dots\dots\dots (4-8) \text{となる。}$$

これはx軸を正の方向に進行する波動を示している。(3-9)式より水位の変化として

$$\xi = i \frac{E R}{C_1 \lambda} \cdot \sin k R_1 h \cdot e^{i(\delta t - R_1 x)} \dots \dots \dots (4-9) \quad \text{ただし } \delta = R_1 C_1 \quad C_1: \text{複素数}$$

$x=0$ に於ける境界との連続条件、(2-11)式を考えると結局半無限の透水層内の不圧海岸地下水位の変動は次式で表わされる。

$$\xi = a e^{i(\delta t - R_1 x)} = a e^{R_1 x} e^{i(\delta t - R_1 x)} = a e^{R_1 x} \cdot \cos(\delta t - R_1 x) \dots \dots \dots (4-10)$$

5. 従来の解との比較。安蔵¹⁾は運動方程式 $\frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial R}{\partial x} \xi + \frac{1}{K} \xi = 0 \dots \dots \dots (5-1)$

と連続式 $\lambda \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (5-2)$ より (5-1) 式に対応するものとして

$$\frac{1}{gH} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{1}{\lambda H} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \dots \dots \dots (5-3) \text{ を導きその解として}$$

$$\xi = a e^{R_1 x} \cos(\delta t - R_1 x) \dots \dots \dots (5-4) \text{ を導いている。ただし } R_1 = H + \xi \quad H \gg \xi$$

$$\text{ここに } R_1 = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{\delta^2 H}{2g} + \frac{\lambda \delta H}{2} \sqrt{\frac{\delta^2}{g^2 \lambda^2} + \frac{1}{K^2}}} \quad R_2 = -\frac{1}{H} \sqrt{\frac{\delta^2 H^2}{2g} + \frac{\lambda \delta H}{2} \sqrt{\frac{\delta^2}{g^2 \lambda^2} + \frac{1}{K^2}}} \dots \dots \dots (5-5)$$

また (5-5) 式において通常考えられる程度の値 $H \geq 1000 \text{ cm}$, $\delta = 1.4 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ (半日周期) $\lambda = 0.2 \sim 0.4$ を代入して見ればわかる様に g を含む項は充分小さいので、 $R_1 = \sqrt{\frac{\lambda \delta}{2KH}}$, $R_2 = \sqrt{\frac{\lambda \delta}{2KH}} \dots \dots \dots (5-6)$ とする近似が良く用いられている。

著者の導いた (4-4) 式において R_1 および R_2 の近似解を求めてみよう。 $R_1 H \approx 0$ とし $\cos R_1 H \approx 1$

$$\sin R_1 H \approx (R_1 + i R_2) H \text{ と近似すれば、 } \frac{\delta^2}{gH} = R_1^2 - R_2^2 > 0 \dots \dots \dots (5-7), \quad 2R_1 R_2 = -\frac{\lambda \delta}{KH} \dots \dots \dots (5-8) \text{ が得られ}$$

これより R_1 および R_2 を求めると安蔵の求めた解 (5-5) 式に一致し、 $|R_1| > |R_2|$ の結果が得られる。しかしこの近似は正しくなく、 $\cos R_1 H \approx 1 + i R_1 R_2 H^2$, $\sin R_1 H \approx (R_1 + i R_2) H$ と近似すれば (5-7) 式に対応するものとして

$$\frac{\delta^2}{gH} + \frac{\lambda \delta}{K} R_1 R_2 H = R_1^2 - R_2^2 \dots \dots \dots (5-9) \text{ が得られ、 } \left| \frac{\delta^2}{gH} \right| \ll \left| \frac{\lambda \delta}{K} R_1 R_2 H \right| \text{ であるため、(5-10) 式}$$

$$\text{のように } |R_1| < |R_2| \text{ の結果が得られる。 } R_1 = \sqrt{\frac{\lambda^2 \delta^2}{4K^2} + \frac{\lambda \delta}{2H} \sqrt{\frac{\lambda^2 \delta^2 H^2}{4K^2} + \frac{1}{K^2}}} \quad R_2 = -\sqrt{\frac{\lambda^2 \delta^2}{4K^2} + \frac{\lambda \delta}{2H} \sqrt{\frac{\lambda^2 \delta^2 H^2}{4K^2} + \frac{1}{K^2}}} \dots \dots \dots (5-10)$$

この差異は安蔵が (5-2) 式において本質的に長波の概念を採用しているためである。したがって透水層内の波動に長波の概念の適用できるとき、—— $R_1 H$ が充分小さい時、——他の条件を一定にすれば透水係数 K がかなり大きい時——には (5-5), (5-6) あるいは (5-10) 式のいずれの値も大差ないが、透水係数が小さくなるにつれて次第に有意な差を生じ、通常の不圧海岸地下水の場合、 $K \leq 0.1 \text{ m/sec}$ 程度以下になるとかなりの差を生じる。若干の数値計算例を表-1に示した。

6. 現地への適用。土木研究所千葉支所土質研究室が長崎県長崎市の方、長崎外港建設現場の埋立地で潮汐による海岸地下水位の変動を実測した。現場は深堀町とその対岸にある香焼島との間の狭水道を約 800 m にわたり埋立をして締切ったもので $F_{1/2}$ に示す様にほぼ二次元に模型化できる。埋立地の平均水深は $H = 10^m$ で埋立材料は風化の進んだ雲母片岩で $D_{50} = 10^{\text{mm}}$, $D_{10} = 0.2^{\text{mm}}$ で、現場密度 $\gamma = 2.00 \text{ g/cm}^3$ 空隙率 $\lambda = 0.2$ であった。

埋立地内の水位変動は $x=0$ および $x=l$ の両端の水域の影響を受けるため、そのポテンシャルを

$$\varphi = [E e^{-i R_1 x} + F e^{-i R_2 (x-l)}] \cos R_1 (H+z) e^{i \delta t} \dots \dots \dots (6-1) \text{ と表わそう。}$$

両端で同じ潮位変動をしているとみなすと 中央 $x = \frac{l}{2}$ の点に関して対称な運動をしているとみなせるから、 $E = F$ となり、水位変動は $\xi = a \frac{1}{1 + e^{-i R_1 l}} [e^{-i R_1 x} + e^{-i R_2 (x-l)}] e^{i \delta t} \dots \dots \dots (6-2) \text{ と表わされる。}$

$e^{R_1 x} > e^{-R_2 (x-l)}$ に注意し、Orderを検討しながら変形すれば (6-2) 式は (4-10) 式と類似の形で安蔵著之轉：井水の水位に及ぼす潮汐の影響について、
九大工学部集報 9 巻 昭和 7 年。

表-1. 減衰係数 R_2 と位相遅れ係数 R_1 の計算例。

透水係数	安蔵の解 (5-5) 式		著者の解 (4-4) 式	
$R_1 \text{ m}^{-1}$	$R_2 \text{ m}^{-1}$	$R_1 \text{ m}^{-1}$	$R_2 \text{ m}^{-1}$	$R_1 \text{ m}^{-1}$
$R_1 = 10$	-3.749×10^{-5}	3.749×10^{-5}	-3.750×10^{-5}	3.746×10^{-5}
$R_1 = 1$	-1.157×10^{-4}	1.157×10^{-4}	-1.158×10^{-4}	1.177×10^{-4}
$R_1 = 0.1$	-3.749×10^{-6}	3.749×10^{-6}	-3.742×10^{-6}	3.564×10^{-6}
$R_1 = 0.01$	-1.156×10^{-7}	1.156×10^{-7}	-3.773×10^{-7}	1.592×10^{-7}

$$\delta = 1.402 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1} \text{ (半日周期)} \quad \lambda = 0.2 \quad H = 1000 \text{ cm}$$

表わされる。

$$\begin{aligned}\xi &= a e^{\frac{k_i}{2} x} \cos(\delta t - k_r' x) \quad \text{----- (6-5)} \\ &= \frac{a}{1 + z e^{\frac{k_i}{2} l} \cos k_r l + e^{\frac{k_i}{2} l}} \sqrt{A \cos^2(k_r x - \theta) + B \cos^2(k_r x - \theta')} \cos(\delta t - \theta) \quad \text{----- (6-4)} \\ \text{ここに } A &= e^{\frac{k_i}{2} x} + z e^{-\frac{k_i}{2} (x-l)} \cos k_r l + e^{-\frac{k_i}{2} (x-l)} \\ B &= e^{\frac{k_i}{2} x} - z e^{-\frac{k_i}{2} (x-l)} \cos k_r l + e^{-\frac{k_i}{2} (x-l)} \\ \theta &= \arctan \frac{e^{-\frac{k_i}{2} (x-l)} \sin k_r l}{e^{\frac{k_i}{2} x} + e^{-\frac{k_i}{2} (x-l)} \cos k_r l} \\ \theta' &= \arctan \frac{e^{\frac{k_i}{2} x} - e^{-\frac{k_i}{2} (x-l)} \cos k_r l}{e^{-\frac{k_i}{2} (x-l)} \sin k_r l} \\ \theta'' &= \arctan \frac{\cos(k_r x - \theta)}{\cos(k_r x - \theta')}\end{aligned}$$

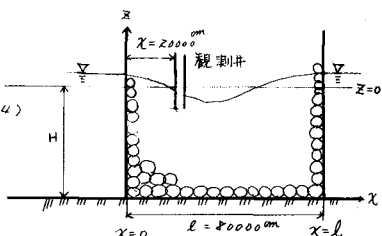


Fig 2. 地下水位観測地の模式化。

一方連続3日観測した $x=0$ および $x=l$ の両端の潮位変動および $x=200$ m の地奥の観測井の地下水位変動を調和解析したところ、各々次の様に表わされた。

$$\text{潮位変動 } \xi = 46.74 \cos(\delta t - 2.84) + 67.74 \cos(\frac{\delta}{2} t - 1.28) \quad \text{----- (6-5)} \quad \delta: 1.402 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1} \text{ (半日周潮)}$$

$$\text{地下水位変動 } \xi = 27.17 \cos(\delta t - 4.64) + 21.76 \cos(\frac{\delta}{2} t - 2.19) \quad \text{----- (6-6)}$$

したがって (6-3) 式より $x=0$ を基準としたみかけの減衰係数 k_i および位相遅れ係数 k_r' を求めると、

$$\begin{aligned}\text{半日周潮に対して } k_i &= -2.910 \times 10^{-5} & \text{1日周潮に対して } k_i &= -2.053 \times 10^{-5} \\ k_r' &= 4.549 \times 10^{-5} & k_r' &= 3.522 \times 10^{-5}\end{aligned} \quad \text{----- (6-7) (6-8)}$$

(6-4) 式よりこの様な k_i, k_r' の値を与える k_i および k_r の値を求めて見ると、

$$\begin{aligned}\text{半日周潮に対して } k_i &= -4.25 \times 10^{-5} & \text{1日周潮に対して } k_i &= -3.15 \times 10^{-5} \\ k_r &= 2.70 \times 10^{-5} & k_r &= 2.50 \times 10^{-5}\end{aligned} \quad \text{----- (6-9) (6-10)}$$

という結果が得られる。さらに (4-4) 式を用いてこの様な k_i, k_r を与える透水係数 k の値を求めて見ると

$$\begin{aligned}k &= 8 \text{ m/sec の場合次のようになる。} & k_i &= -4.172 \times 10^{-5} & k_i &= -2.964 \times 10^{-5} \\ \text{半日周潮に対して } k_r &= 4.189 \times 10^{-5} & \text{1日周潮に対して } k_r &= 2.783 \times 10^{-5}\end{aligned} \quad \text{----- (6-11) (6-12)}$$

(6-9) および (6-10) 式で得られた値の方が $|k_i|$ と $|k_r|$ との差異が大きいから、これは (6-3) および (6-4) 式を導くにあたり微小項を無視した影響があらわれたものと考えている。

7. 透水層が異方性の場合の検討。運動方程式か (7-1) および (7-2) 式で表わされる様に透水層が異方性の場合の検討を行なってみよう。

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{U}{k_x} g \quad \text{----- (7-1)}$$

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} = -g - \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{U}{k_z} g \quad \text{----- (7-2)} \quad \text{定常流の場合、よく行なわれる様に } \chi_1 = \sqrt{\frac{k_x}{k_z}} \cdot \chi \quad \text{----- (7-3) と}$$

変換を行なうと (2-6) 式に対応する $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \chi_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$ ----- (7-4) は得られるから、(2-7) 式に対応する式は得られない。

そこで (7-1) および (7-2) 式の左辺 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \chi_1^2}$ 、 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$ 、 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \chi_1 \partial z}$ 、 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \chi_1}$ と近似して (2-7) 式に対応するものとして $-\frac{1}{k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{p}{p} g + g$ ----- (7-5) を使用することにする。ここに $k = \sqrt{k_x \cdot k_z}$ 以下 z および y に述べたと同様の手法により (4-4) 式に対応するものとして次式を得る。

$$[\delta - i \frac{\lambda g}{k}] \cos h(k_r + i k_i) H = g \frac{(k_r + i k_i)}{k} k_x \sinh(k_r + i k_i) H \quad \text{----- (7-6)} \quad (k_r \text{ および } k_i \text{ は座標系 } \chi_1 \text{ に対するもの})$$

(7-6) および (7-3) 式を使用して x 座標に対する k_i および k_r を求めてみると、これらの値はほぼ $k_x = k$ において (4-4) 式より求めた値と一致し、垂直方向の透水係数 k_z の効果は小さいことがわかる。これは (5-1) 式の様にしては運動方程式が x 方向のみしか考慮できないことからみても明らかである。数値計算例によると $k_z < \frac{1}{10} k_x$, $k_x < 1$ 程度になると有意な差をもちはじめられる様であるが、通常の不圧海岸地下水の問題を考える時はあまり大きな影響を与えない様であり、(6-9) および (6-10) 式による $|k_i|$ と $|k_r|$ の差異は異方性の影響とは考えられない様である。最後に布計議を頂いた中央大学首藤助教授、データを頂いた土木研究所土質研究室に対して深く感謝の意を表する。