

正員 埼玉大学 嶋 祐之

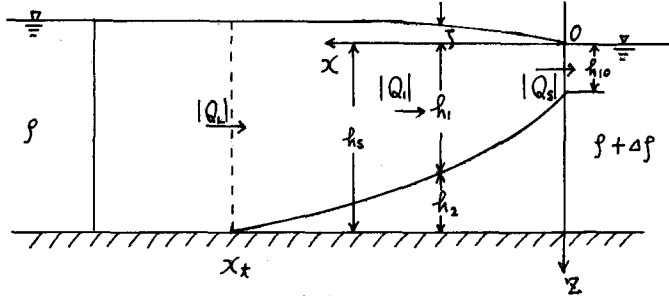


図-1 塩水楔

地下に生ずる塩水楔の現象は、古くは Hertzberg, 野浦らによって研究されたが、近年においても Rumer, Harleman¹⁾; Bear, Dagan²⁾; 玉井, 著者³⁾らによってその非定常現象の研究が行われ、幾多の重要な特性が明かにされてきた。しかし従来の解析では、淡水境界面が海岸線とま

じわるの交角が時間の経過と無関係に固定されていること、境界面形状の曲率の変化特性が考慮されていないことのため、とくに現象の初期における塩水楔の侵入特性を正しく表現するためにはやや不十分な点が認められる。そこで、前者については海岸線における鉛直流速効果を考慮し、また後者については淡水流量の場所的分布に関し高次の項まで考慮することにより、それぞれの特性を表現しようと試み解析を行った結果について報告する。

いま、 $t < 0$ では $x > 0$ の透水層は淡水で満され隔壁によって塩水槽とは遮断されているとする。 $t = 0$ で隔壁を取り除けば淡水は塩水槽へ流出し始めると同時に塩水は楔状に下層に浸入する。淡水槽水位が塩水槽水位よりやや高ければ、 $t = \infty$ で塩水楔は停止し淡水の一定流量 Q_L が塩水槽へ定常的に流出する。上記の非定常課題を解くにあたり、透水層中では Dupuit - Forchheimer の仮定が成立するとし、また流量に関する自由表面の高さの効果は小さいと考える。

運動方程式

$$u_1 = -k \frac{\partial \gamma}{\partial x} \quad \text{---- (1)}$$

$$u_2 = -k \frac{\partial}{\partial x} (\gamma - \varepsilon h_1) \quad \text{---- (2)}$$

連続の方程式

$$\lambda \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} = 0 \quad \text{---- (3)}$$

$$\lambda \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0 \quad \text{---- (4)}$$

ここで

$$h_1 + h_2 = h_s \quad (\text{一定}) \quad \text{---- (5)}$$

$$Q_1 + Q_2 = Q_L(t) \quad \text{---- (6)}$$

こゝに
 u_1, u_2 ---- 水平流速
 h_1, h_2 ---- 上, 下層水深
 k ---- 透水係数
 ε ---- $\Delta \rho / \rho$
 Q_1, Q_2 ---- 上, 下層流量
 λ ---- porosity
 h_s ---- 全水深

すなわち、淡水流量と塩水流量の和は楔先端での淡水流量と一致し、時間のみの関数である。(1), (2), (5), (6) より u_1, u_2, h_2, Q_2 を消去すれば ($Q_i = h_i u_i$)

$$k \varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{Q_L}{h_s - h_1} - \frac{Q_1 h_s}{h_1 (h_s - h_1)} \quad \text{---- (7)}$$

境界面と海岸線との交差の上昇条件は次のようにして導かれる。 先づ、上層の鉛直流速はダルシー法則と連続の式より次式で示される。

$$w_1 = -\frac{k}{\rho_1 g} \frac{\partial}{\partial z} (p_1 - \rho_1 g z) = -\int_0^z \frac{\partial u_1}{\partial x} dz \quad \text{---- (8)}$$

ただし、自由表面の鉛直流速は小さいとして無視する。 一方 x 方向の速度勾配は $Q_1 = u_1 h_1$ を考慮すれば

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} \frac{1}{h_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{Q_1}{h_1^2} \quad \text{----- (9)}$$

(3) および (7) を上式に代入し、それぞれ $\frac{\partial Q_1}{\partial x}$ および $\frac{\partial h_1}{\partial x}$ を消去する。 その結果を (8) に代入し、さらに同式の積分を行えば、鉛直流速効果を考慮した場合の上層における圧力分布が次式のように求められる。

$$p_1 = \rho_1 g \left[z - \frac{1}{2k} \left\{ \frac{\lambda}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial t} z^2 + \frac{Q_1 (Q_L h_1 - Q_S h_S)}{k \epsilon h_1^3 (h_S - h_1)} z^2 \right\} \right] \quad \text{--- (10)}$$

こゝで、 $x=0$ における境界条件

$$z = h_1 = h_{10}, \quad Q_1 = Q_S, \quad p_1 = \rho_1 g h_{10} \quad \text{---- (11)}$$

を (10) に代入すれば、次式が導かれる。

$$2 \epsilon = -\frac{\lambda}{k} \frac{dh_{10}}{dt} - \frac{Q_S (Q_L h_{10} - Q_S h_S)}{k^2 \epsilon h_{10}^2 (h_S - h_{10})} \quad \text{---- (12)}$$

全く同様な操作を下層に対して適用すれば

$$-\lambda \frac{dh_{10}}{dt} - \frac{(Q_L h_{10} - Q_S h_S)(Q_L - h_S)}{k \epsilon h_{10} (h_S - h_{10})^2} = 0 \quad \text{---- (13)}$$

が導かれる。 上の 2 式より任意時刻の h_{10} は楔先端の淡水流量 Q_L および海岸線における淡水流量 Q_S の関数として次式のような簡潔な無次元式で与えられる。

$$\frac{\beta(\bar{Q}_S - \alpha)}{\alpha(1 - \alpha)} = 1 \quad \text{----- (14)}$$

こゝに

$$\alpha = \frac{h_{10}}{h_S}, \quad \beta = \frac{-Q_L}{\sqrt{2} k \epsilon} = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha, \quad \bar{Q}_S = \frac{Q_S}{Q_L} \quad \text{--- (15)}$$

淡水流量の場所的分布に関して、Bear らは図-2 (a) に示されるような仮定を行ったが、こゝで

はさらに高次の項を考慮し図-2 (b) で示されるような仮定を行った。
すなわち

$$Q_1 = Q_L + (Q_L - Q_S) \left\{ \eta \frac{h_S - h_1}{h_S - h_{10}} + (1 - \eta) \left(\frac{h_S - h_1}{h_S - h_{10}} \right)^2 \right\} \quad \text{---- (16)}$$

こゝに η は係数で、実験結果より求めることとなる。 また $\eta = 1$ とした場合は、Bear らの仮定と一致する。

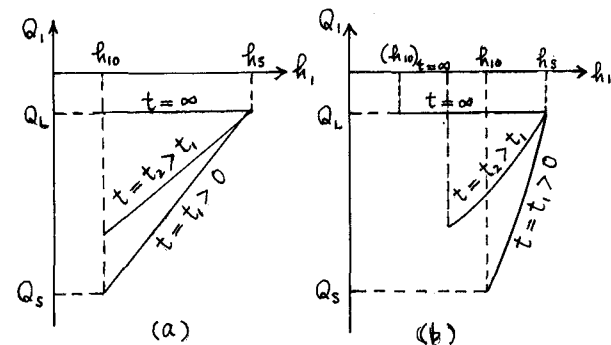


図-2 淡水流量の場所的分布

Q_L は厳密には t の関数であるが、自由表面の変化は楔の進行に比し早く定常状態に達することを考

應し一定と仮定する。上述の二つの仮定を(7)に適用すれば、境界面形状を決定すべき微分方程式が次のような無次元型式で表わされる。

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{A+B-\beta\zeta}{\zeta} \quad \text{----- (17)}$$

こゝに

$$A = \sqrt{2}\beta \left\{ 1 + \frac{(\overline{Q}_s-1)\eta}{1-\alpha} \right\}, \quad B = \frac{\sqrt{2}\beta(\overline{Q}_s-1)(1-\eta)}{(1-\alpha)^2} \quad \text{--- (18)}$$

$$\zeta = h/h_s, \quad \xi = x/h_s$$

(17)を積分し、境界条件 $\zeta=0$, $\xi=\alpha$ を代入し、さらに(14)より $\overline{Q}_s$ を消去すれば

$$\overline{x} = \sqrt{2}\beta\xi = \frac{(1-\alpha)\beta}{(1-\eta)(\alpha-\beta)} \left\{ \frac{1}{\mu} \log \frac{1-\mu\alpha}{1-\mu\zeta} - (\zeta-\alpha) \right\} \quad \text{---- (19)}$$

こゝに

$$\mu = \frac{(1-\eta)(\alpha-\beta)}{\alpha\{1+\beta(\eta-1)-\eta\alpha\}} \quad \text{----- (20)}$$

(19)において、 β は定常特性より、 η は実験より求められるとしても α は未知量である。そこで楔全体に関する連続方程式

$$\frac{d\overline{V}_s}{dt} = 1 - \overline{Q}_s, \quad \overline{V}_s = \int_{\alpha}^1 \overline{x} d\zeta \quad \text{---- (21)}$$

より α の時間的変化を求める。こゝに $\overline{V}_s$ は楔の体積であり、また

$$\overline{V}_s = \frac{|Q_1|V_s}{\kappa\epsilon h_s^3}, \quad \tau = \frac{Q_1^2 t}{\lambda\kappa\epsilon h_s^3} \quad \text{----- (22)}$$

(14)を(21)のオ1式に代入し $\overline{Q}_s$ を消去すれば

$$\frac{d\overline{V}_s}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{(1-\alpha)(\alpha-\beta)}{\beta} \quad \text{---- (23)}$$

また、(19)を(21)のオ2式に代入すれば

$$\overline{V}_s = \frac{(1-\alpha)\beta}{(\eta-1)(\alpha-\beta)} \left[\frac{(1-\alpha)^2}{2} - \frac{(1-\alpha)}{\mu} - \frac{1-\mu}{\mu^2} \log \frac{1-\mu}{1-\mu\alpha} \right] \quad \text{--- (24)}$$

上の二つの式より $\overline{V}_s$ を消去すれば、 α の時間的変化は理論的に求められる筈である。求められた結果を(19)に代入すれば任意時刻の境界面形状や楔先端の移動状況が導かれる。

理論の妥当性を検討するため実験結果との比較を行う。いま、(19)において $\zeta=1$ としたとき、 $\overline{x}=\overline{x}_e$ とすれば、楔先端の位置と海岸線における境界面交点との関係が β および η をParameterとして求められる。図-3はその結果を表れずと同時に、 $\beta=1$ の場合の実験結果をプロットしたものである。この図より η の値は2~3の値をとれば良いことがわかる。

次に、楔の進行に伴う境界面形状の変化について理論と実験との比較を行ったものが図-4である。すなわち、(19)において α をParameterとして任意時刻の境界面形状を画くと、現象の初期 $1>\alpha>\alpha_c$ では曲線は上向きに凸となり、時間の経過につれ $\beta<\alpha<\alpha_c$ では下向きに凸となる。こゝに α_c は $1+\beta(\eta-1)-\eta\alpha=0$ を満足する値である。このことは実験において観察される境界面形状の変化特性をかなり明快に裏付けると云えよう。

楔先端の位置の時間的変化を求めるには、(23)および(24)より $\overline{V}_s$ を消去して α と t の関係を求め、

さらに (19) において $\gamma=1$, $\bar{x}=\bar{x}_*$ において $\bar{x}_*\sim\alpha$ の関係を求める。最後に兩者の関係より α を Parameter として $\bar{x}_*\sim\alpha$ の関係を求めればよい。このようにして求めた結果を, $\eta=1$ および 3 の場合に対しそれぞれ β を Parameter として表わしたものが図-5である。 $\beta=0.1$ の場合の実験結果をプロットすれば, 現象の初期には ($\alpha<0.3$) 完全に理論と一致するが, それ以後では理論より次々に進行が遅くなることが認められる。この理由は, (23) の積分の際近似計算を行ったことと, 楔の先端に生ずる丸味の影響を考慮しなかったためかと考えられるので, 現在それらの点についてさらに検討を進めている。

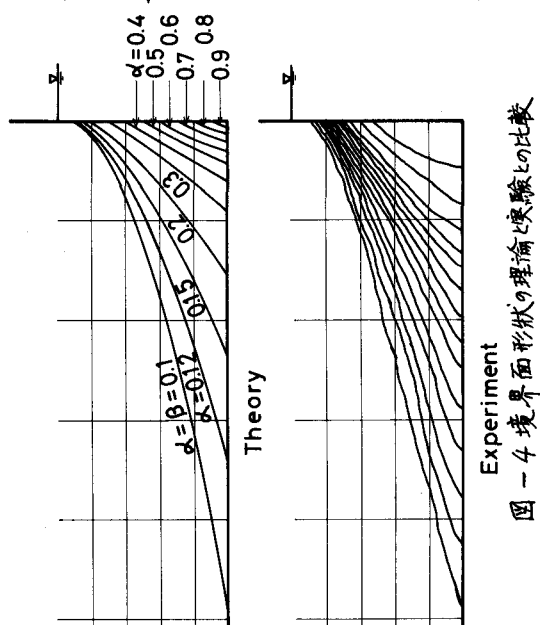


図-4 境界面形状の理論と実験との比較

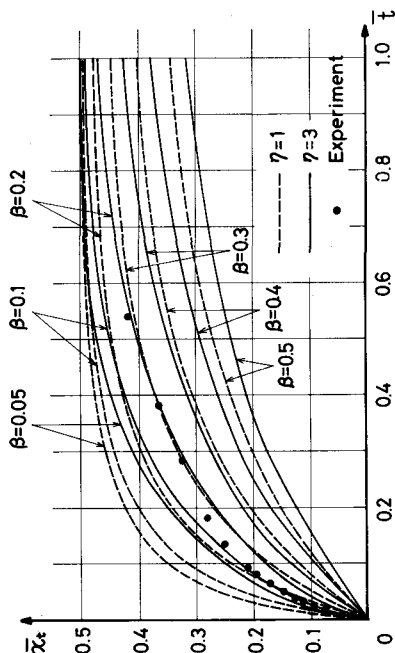


図-5 楔先端の進行状態

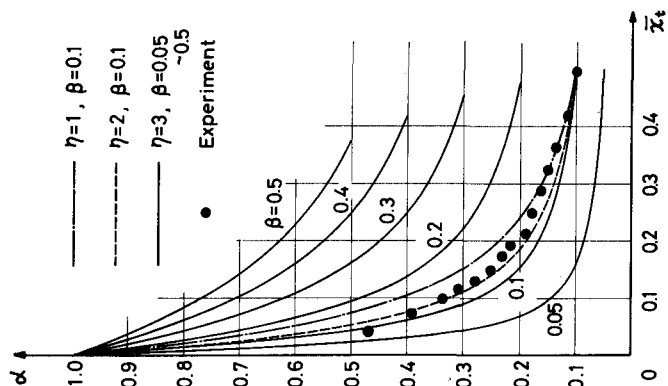


図-3 α と $\bar{x}_*$ との関係

参考文献

- 1) Rumer and Harleman: Introduced Salt-Water Wedge in Porous Media, Proc. A. S. C. E., Vol. 89, No. HY 6, Nov. 1963
- 2) Bear and Dagan: Moving Interface in Coastal Aquifers, Proc. A. S. C. E. Vol. 90, No. HY 4 July 1964
- 3) Tamai and Shima: Salt-Water Wedge in Coastal Aquifers.

Trans. J. S. C. E. No. 139, March 1967

- 4) Nomitsu, Toyohara and Kamimoto: On the Contact Surface of Fresh and Salt-Water under the Ground near a Sandy Sea Shore, Mem. of Coll. Sci, Kyoto Imp. Univ., A, Vol. 10, No. 7, 1927