

京都大学 防災研究所 正員 岡 太郎

まえがき 前報¹⁾において Confined seepage 問題に Forchheimer 則を適用して基礎方程式を導出し Cowley-Ley の解法を用いて有限領域における矢板のまわりの流れについて数値解を求めるとともに、実験結果と対比してこの基礎式の適応性を示した。今回はいくつかの Sheet pile の配列形式について行った数値計算結果について若干の論議を行うとともにこの数値計算の収束性についても若干の考察を加える。

I 基礎方程式¹⁾

1. 流れの函数 (Ψ) について

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad u \geq 0, \quad v \geq 0 \text{ のとき} \quad & a \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right\} = 2b \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y^2} \right\} \quad \text{----- (a)} \\ \text{(ii)} \quad u > 0, \quad v < 0 \text{ のとき} \quad & a \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right\} = -2b \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y^2} \right\} \quad \text{----- (b)} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (1)}$$

2. 水頭 (h) について

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad u \geq 0, \quad v \geq 0 \text{ のとき} \quad & \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -2b \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad \text{----- (a)} \\ \text{(ii)} \quad u > 0, \quad v < 0 \text{ のとき} \quad & \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -2b \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad \text{----- (b)} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (2)}$$

ここで x, y : 座標, a, b : Forchheimer 則をあらわす $-\frac{H}{L} = aV + bV^2$ の係数, Ψ : 流れの函数, h : 水頭

II. 逐次代入法²⁾ (1)式は非線型であり解を得ることは容易ではない。ここでは逐次代入法を用いて数値解を求める。(1-a)式を差分方程式に展開しこの解法で用いる形で書くと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{i,j}^{m+1} &= \Psi_{i,j}^n + \omega RA_{i,j} \quad \text{----- (a)} \\ RA_{i,j} &= (\Psi_{i+1,j}^{m+1} + \Psi_{i-1,j}^n + \Psi_{i,j+1}^{m+1} + \Psi_{i,j-1}^n - \rho_{i,j})/4 - \Psi_{i,j}^n \quad \text{----- (b)} \\ \rho_{i,j} &= \frac{b}{a\ell} \{ (\Psi_{i+1,j}^{m+1} - \Psi_{i-1,j}^n)(\Psi_{i,j+1}^{m+1} + \Psi_{i,j-1}^n - 2\Psi_{i,j}^n) - (\Psi_{i,j+1}^{m+1} - \Psi_{i,j-1}^n)(\Psi_{i+1,j}^{m+1} + \Psi_{i-1,j}^n - 2\Psi_{i,j}^n) \} \quad \text{----- (c)} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (3)}$$

ここで i, j は格子点を示す添字, ℓ は格子点の間隔, ω は加速係数であり, $n+1$ はすでに n に近いものになっている場合はその値を使うことを意味している。

(2-a)式については次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} h_{i,j}^{n+1} &= h_{i,j}^n + \omega RA_{i,j} \quad \text{----- (a)} \\ RA_{i,j} &= (h_{i+1,j}^{n+1} + h_{i-1,j}^n + h_{i,j+1}^{n+1} + h_{i,j-1}^n - C_{i,j})/4 - h_{i,j}^n \quad \text{----- (b)} \\ C_{i,j} &= -\frac{b}{4\ell} (\Psi_{i+1,j+1}^{m+1} - \Psi_{i-1,j-1}^n - \Psi_{i-1,j+1}^{m+1} + \Psi_{i+1,j-1}^n)(\Psi_{i,j+1}^{m+1} - \Psi_{i,j-1}^n + \Psi_{i+1,j}^{m+1} - \Psi_{i-1,j}^n) \quad \text{----- (c)} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (4)}$$

(3),(4)式を用いて $\Psi_{i,j}^{m+1}, h_{i,j}^{m+1}$ を求めるには次のようにする。まず(c)式において各点の $\rho_{i,j}$ または $C_{i,j}$ を計算し, これを(b)式に代入して $\Psi_{i,j}^n, h_{i,j}^n$ の修正量 $RA_{i,j}$ を求める。次に(a)式により $\Psi_{i,j}^{m+1}, h_{i,j}^{m+1}$ を求める。

(4)式の C_{ij} はすでに ψ_{ij} が求められているので最初計算しておけば良い。

これを全領域について収束するまで繰返す。

収束判定については修正量 RA のすべての交点での絶対値の和があらかじめ与えられた小さい値より小さくなったとき収束したものとみなす。境界条件については前報と同じである。

Ⅲ. 計算結果 Fig. 1 に示す sheet pile 配列形式をいろいろな条件下で検討した結果について述べる。ただし Forchheimer 則の係数は前報の実験より得られたものを用いた。

(1) 流線網; Fig. 1 (a) の $a/A = 0.5$, $d/D = 0.75$ の配列例について、係数 $a = 0.27 \text{ sec/cm}$, $b = 0.25 \text{ sec/cm}^2$, 単位巾当りの流量 $q = 20 \text{ cm}^2/\text{sec}$ の場合の計算結果を Fig. 2 に例示する。同図から流線分布はラプラス方程式の解から得られるそれより平均化され、等水頭線はラプラス方程式の解に比べて流速の大きい部分に集まっていることがわかる。両者の特に顕著な差異は $q = 20 \text{ cm}^2/\text{sec}$

の流量を生じさせるために要する全水頭 H がラプラス解では 23.4 cm , この理論では 74.9 cm となることである。

(2) 流量 q と全水頭 H との関係; Fig. 1-a において,

$$\frac{a}{A} = \frac{q \text{ の中心から sheet pile までの距離}}{q \text{ の長さの } 1/2} = 0.5, \quad \frac{d}{D} = \frac{\text{sheet pile の長さ}}{\text{透水層の厚さ}} = 0.5$$

の場合、Forchheimer 則の係数 a, b と流量 q および全水頭 H の関係を Fig. 3 に示す。同図にラプラス方程式から得られる $q \sim H$ の関係を併示する。この図より各組の係数の $q \sim H$ に与える影響が明らかになる。

(3) 揚圧力分布と sheet pile に働く力; Fig. 1-a の場において $a/A = 0.5$, $d/D = 0.5$, $a = 0.27 \text{ sec/cm}$, $b = 0.25 \text{ sec/cm}^2$; $q = 30 \text{ cm}^2/\text{sec}$ の場合の揚圧力分布および sheet pile に働く力の分布を Fig. 4 に示す。この場合ラプラス方程式から得られる H は 35.9 cm であり、(1), (2)式から得られるそれ

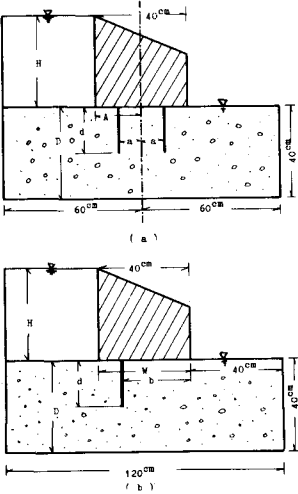


Fig. 1 解析領域概略図

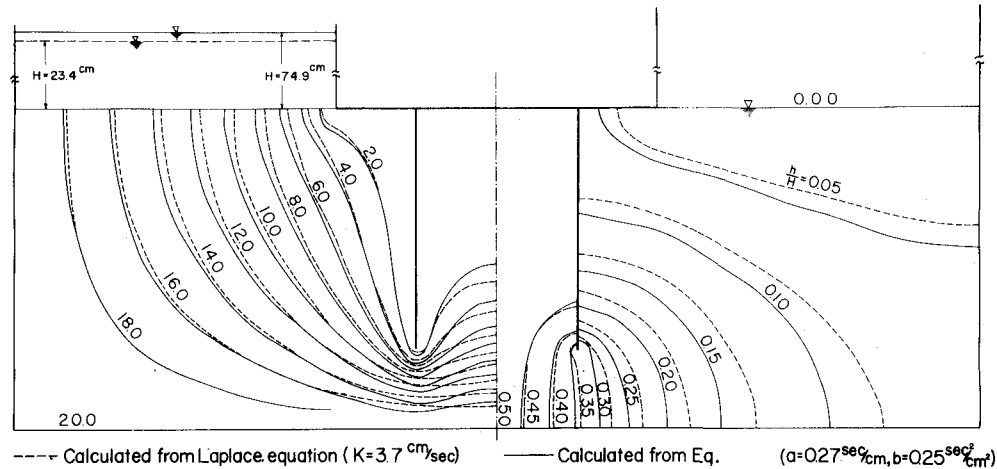


Fig. 2 計算結果 (流線網)

は151.8cmである。この図では比較のため各場所に作用している圧力(水頭)をHで除してある。この計算では揚圧力の分布に大きな差異はみられなかった。

(4)流速分布; 前述(3)の計算結果を流入面における seepage velocity (v) について整理すると Fig.5 が得られる。ラプラス方程式から得られる流速はダムの近くでは大きく、ダムを離れると急に減小しているのに対し、(1)式から得られる流速はダムの近くでもそれほど大きくなく、流速は緩やかに減小している。すなわち、ラプラス方程式から得られた解と比較するとき、ダム近傍の流量減小分をダムから離れた場所で流下させていることがわかる。

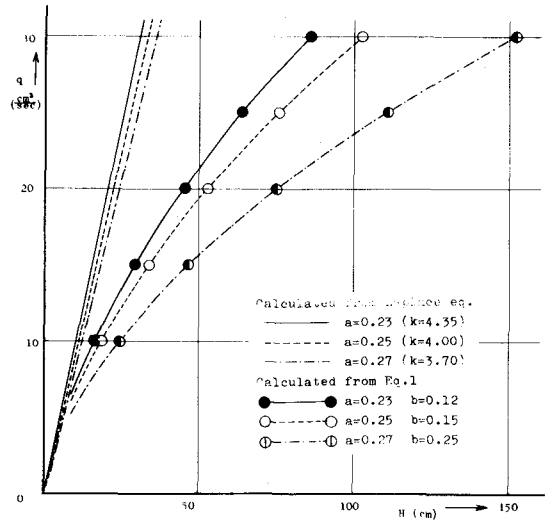


Fig.3 流量 q と水頭 H との関係

(5) Sheet pile の位置、深さと H との関係; $a=0.23 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, $b=0.12 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, $q_f=20 \text{ cm}^3/\text{sec}$ の場合の、 d/D と H との関係を a/A または b/W ($= \frac{\text{ダムの下端から sheet pile までの長さ}}{\text{ダムの長さ}}$) をパラメータとして Fig. 6, 7 に示す。Fig. 6 は Fig. 1-(a), Fig. 7 は Fig. 1-(b) の各領域における計算結果を示す。同図にラプラス方程式から得られた結果を併示してあるが、その差異は顕著にみられる。しかし sheet pile の位置、深さと H との関係は同じ傾向にあり、sheet pile が深ければ深いほど、sheet pile がダムの端に近ければ近いほど、また Fig. 6, 7 の比較から一本、sheet pile より 2 本の sheet pile の方がより効果が大いことが示されている。

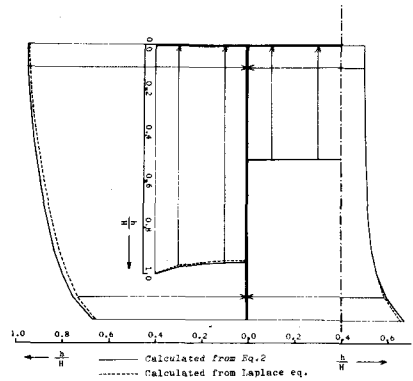


Fig.4 揚圧力 と sheet pile に伝わる力(水頭)

IV. 収束に関する考察 逐次代入法の繰返し計算において、収束を確実にし、収束を早めることは計算の能率を上げる面から重要である。この計算では seepage 問題として具体的な解を求めることとしたいため、計算は電子計算機の腕力に頼り、収束速度に大きく関係すると思われる加速係数については十分な検討は行っていない。しかし、加速係数のとり方によっては繰返し計算が収束しなかった場合も生じたので、ここで Fig. 1-(a) において $a/A=0.5$, $d/D=0.5$ の場合の数値計算を例に取り収束について考察する。

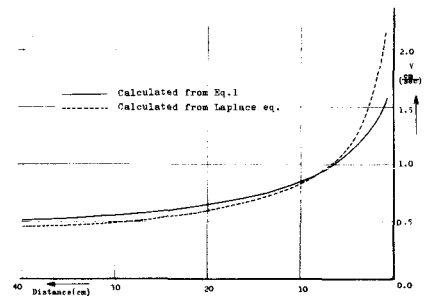


Fig.5 流入面における流速分布

この数値計算の出発値 ψ, θ として $b=0$ の場合すなわちラプラス方程式の解を用いる。Fig. 1-(a) の場合は左右対称であるのでこの透水層の半領域について解析すれば良い。従って、mesh の間隔 Δx を 2.5 cm とすると計算を行なう交点数は約 400 個である。

また収束を判定するための ε として 0.5 を与えてはいるが、この問題では一点に RA が集中することも考えられるので、一点の $|RA|$ が 0.001 を越えなくなるまで繰返し計算を行なった。

Fig 8 に出発値 ψ^0, ϕ^0 を S.O.R. 法³⁾ により求めるための繰返し回数 (N) と $\Sigma|RA|$ との関係を示す。実線が Fig. 6 二列の sheet pile を有る場合の $H \sim d/D$ ψ^0 、破線が ϕ^0 を求めるときのものである。ただし加速係数は両者とも 1.8 を使用している。両者の収束速度のちがいは境界条件のちがいによるものであり、この加速係数は ϕ^0 より ψ^0 を求める際に有利である。(4) 式による ϕ の計算においても $\omega = 1.8$

を使用したがこの際の収束は Fig 8 の破線とはほぼ等しい経過を取った。

Fig 9 に (3) 式による逐次代入法の繰返し計算の収束の経過を示す。加速係数を 1.0 とした場合 $q = 25$ 以上ではすべての場合、また $q = 20$ では $a = 0.27, b = 0.25$ の場合に収束しなかった。そこでとりあえず加速係数 0.5 を用い計算を行い発散を防いだ。この場合の収束経過を Fig 9 の実線で示す。

この収束条件、収束速度は出発値、格子点の数、係数 a, b, q の値等に関係するので、それぞれを検討せねばならぬが、繰返しの初期において 1.0 より小さい加速係数を用い、次の段階で（この計算では 20～30 回の繰返し後）加速係数を 1.0 以上のものに変えることによってより早い速度で収束させることが可能のようである。

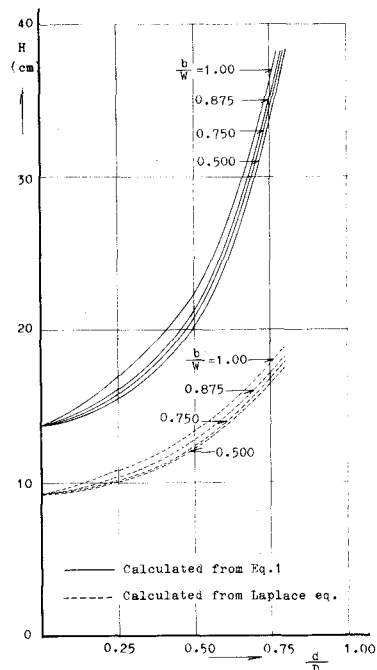
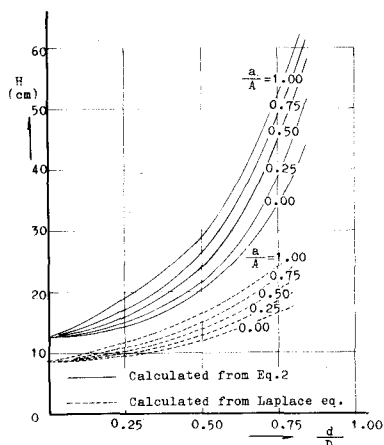


Fig. 7 一列の sheet pile を有る場合の $H \sim d/D$

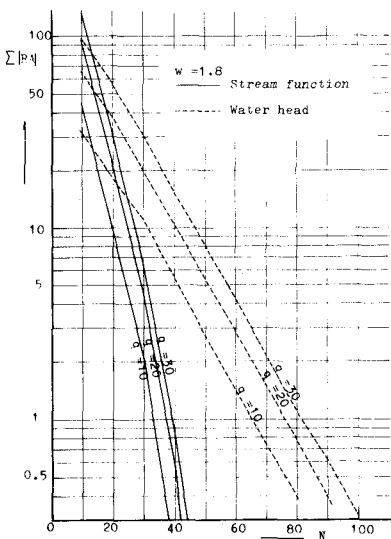


Fig. 8 S.O.R. 法における $N \sim \Sigma|RA|$

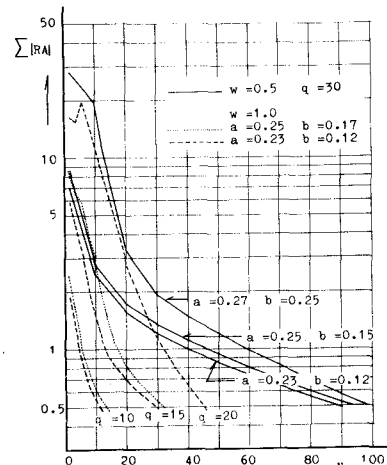


Fig. 9 逐次代入法における $N \sim \Sigma|RA|$

参考文献 1) 西 水利構造物下の浸透流について 第23回年次学術講演会 講演概要 第II部 17 P423-426

2) Forchheimer 則に適用した Confined Seepage 京大 研究年報 12号B P401-410

3) 高見 頼郎 Navier-Stokes 方程式の解の計算 数値解析講義録 37 P53-66

4) 一松 信 他 2名 数値計算法(1) 培風館 P163-192