II−109　海水飽和地盤内部の暗きよからの淡水浸透（第一報）

九州産業大学　正員　崎山 正常

1．まえがき　河口貯水池計画などと相まって地下密度流的に検討しなければならない問題はいろいろあるが，本報では図−1に示すような暗きよから淡水を浸透させて貯水池内に浸透してくる海水を遮断しようと云う一案について，図−1に示す特異点EおよびFが一致した状態での検討を行なった。この状態ではもちろんその外側からの海水の浸入が考えられるが，ここでは特異点EおよびFが一致しない状態すなわち海水を完全に遮断した状態の前提として取扱うわけであるから淡水浸透領域外の海水は動いていないものと仮定する．そうすると流れは図−2に示すような二次元対称流となる。このような暗きよ自体，構造または施工のうえからいろいろ困難な問題点があるかとも予想できるが，海水浸入防止対策としてはかなり確実な効果が期待できるものと考える．第二報では特異点EおよびFが一致しない二次元非対称流について検討する計画である。

2．解析　2·1．基礎方程式　速度ポテンシャルをΦ，流れ関数をΨ，透水係数をkとして他は図中の記号にしたがうとSchwarz-Christoffelの定理と図−3に示す境界条件とにより

$$w=\Phi+i\Psi=k(H_1+H_u+h)+N\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{-t}\sqrt{1-t}\sqrt{d-t}}\quad\cdots(1),$$

また淡塩境界面の任意点における速度ポテンシャルΦ_sは　$\Phi_s=k\{H_u+(1+\varepsilon)H_1\}-k\varepsilon y_s\quad\cdots(2)$，ここに　$\varepsilon=(\gamma_s-\gamma_f)/\gamma_s\quad\cdots(3)$，$\gamma_s$は海水比重，$\gamma_f$は淡水比重となるからZhukovsky関数化は

$$\Omega_1=\Phi+k\varepsilon y,\quad \Omega_2=\Psi-k\varepsilon x,\quad \Omega=\Omega_1+i\Omega_2\quad\cdots(4)$$

となる。図−4に示す境界条件より

$$\Omega=\Omega_1+i\Omega_2=k(H_1+H_u+h)+M\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{-t}\sqrt{1-t}\sqrt{c-t}}\quad\cdots(5)$$

がえられる。式(1)において

$$T^2=t=\xi+i\eta,\quad \Delta^2=1/d,\quad \Delta'^2=1-\Delta^2$$
$$\varphi=\{k(H_1+H_u+h)-\Phi\}/(2AN),\quad \psi=\Psi/(2AN)\quad\cdots(6)$$

とおくと　$T^2=sn^2(\psi+i\varphi,\Delta)\quad\cdots(7)$

snおよび以後にあらわれるcn，dnはJacobiの楕円関数である。式(7)を展開したものと式(6)のT^2の式から

$$\xi=\left[\{sn(\psi)dn(\varphi)\}^2-\{cn(\psi)dn(\psi)sn(\varphi)cn(\varphi)\}^2\right]/\left\{1-dn^2(\psi)sn^2(\varphi)\right\}^2\quad\cdots(8)$$
$$\eta=2sn(\psi)dn(\varphi)cn(\psi)dn(\psi)sn(\varphi)cn(\varphi)/\left\{1-dn^2(\psi)sn^2(\varphi)\right\}^2\quad\cdots(9)$$

がえられる．ただしψおよびφに関する母数はΔおよびΔ'である。

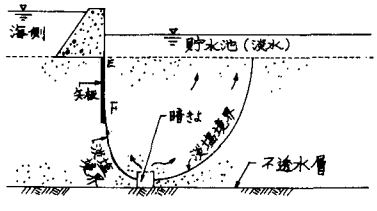
次に，式(5)において　$\gamma^2=1/c,\quad \gamma'^2=1-\gamma^2\quad\cdots(10)$

$$\omega_1=\{k(H_1+H_u+h)-\Omega_1\}/(2\gamma M),\quad \omega_2=\Omega_2/(2\gamma M)\quad\cdots(11)$$

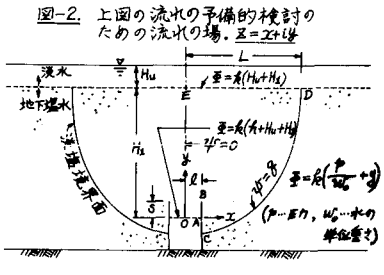
とおくと　$T^2=sn^2(\omega_2+i\omega_1,\gamma)\quad\cdots(12)$

式(12)を展開したものと式(6)のT^2の式から

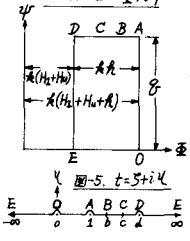
図−1．海水浸入遮断図



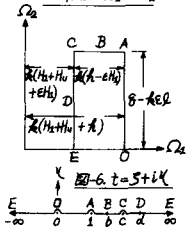
図−2．上図の流れの予備的検討のための流れの場．$z=x+iy$



図−3．$w=\Phi+i\Psi$



図−4．$\Omega=\Omega_1+i\Omega_2$



図−5．$t=\xi+i\eta$

図−6．$t=\xi+i\eta$

$$\zeta=\left[\{sn(\omega_2)dn(\omega_1)\}^2-\{cn(\omega_2)dn(\omega_2)sn(\omega_1)cn(\omega_1)\}^2\right]\Big/\{1-dn^2(\omega_2)sn^2(\omega_1)\}^2 \quad\cdots(13)$$

$$\eta=2sn(\omega_2)dn(\omega_1)cn(\omega_2)dn(\omega_2)sn(\omega_1)cn(\omega_1)\Big/\{1-dn^2(\omega_2)sn^2(\omega_1)\}^2 \quad\cdots(14)$$

ただし，ω_2 および ω_1 に関する母数は γ および γ' である。式(8)に点Eの条件 $\zeta=\pm\infty$，$\eta=0$，$\varphi=kh/(2\Delta N)$ および $\psi=0$ を適用すると

$$kh/(2\Delta N)=K(\Delta') \quad\cdots(15)$$

ここに $K(\Delta')$ は Δ' を母数とする第一種楕円積分である。同様に点Aの条件より

$$g/(2\Delta N)=K(\Delta) \quad\cdots(16)$$

したがって

$$g/(kh)=K(\Delta)/K(\Delta') \quad\cdots(17)$$

次に式(13)にE点の条件 $\zeta=\pm\infty$，$\eta=0$，$\omega_2=0$ および $\omega_1=k(h-\varepsilon H_1)/(2\gamma M)$ を適用すると

$$k(h-\varepsilon H_1)/(2\gamma M)=K(\gamma') \quad\cdots(18)$$

同様に点Aの条件より

$$(g-k\varepsilon l)/(2\gamma M)=K(\gamma) \quad\cdots(19)$$

式(17)，(18) および (19) より

$$\varepsilon\frac{l}{h}=\frac{K(\Delta)}{K(\Delta')}-\left(1-\varepsilon\frac{H_1}{h}\right)\frac{K(\gamma)}{K(\gamma')} \quad\cdots(20)$$

式(15)を式(6)の φ および ψ に適用すると

$$\frac{\Phi}{kh}=\left(1+\frac{H_2}{h}+\frac{H_u}{h}\right)-\frac{\varphi}{K(\Delta')} \quad\cdots(21)$$

$$\frac{\psi}{kh}=\frac{\chi}{K(\Delta')} \quad\cdots(22)$$

式(18)を式(11)の ω_1 および ω_2 に適用し，式(21)および(22)を用いれば次の二式がえられる。

$$\varepsilon\frac{y}{h}=\frac{\varphi}{K(\Delta')}-\left(1-\varepsilon\frac{H_1}{h}\right)\frac{\omega_1}{K(\gamma')} \quad\cdots(23)$$

$$\varepsilon\frac{x}{h}=\frac{\chi}{K(\Delta')}-\left(1-\varepsilon\frac{H_1}{h}\right)\frac{\omega_2}{K(\gamma')} \quad\cdots(24)$$

2·2. 境界面 各境界面においては式(8)および(13)より，$F(\Delta,\Theta)$ を Δ を母数とする第一種楕円積分として

E~O上… $\left(\frac{-\zeta}{1-\zeta}\right)=sn^2(\varphi)=sn^2(\omega_1)=\sin^2\theta$ …(26)

$$\varphi=F(\Delta',\theta),\quad \omega_1=F(\gamma',\theta) \quad\cdots(27)$$

O~A上… $\zeta=sn^2(\psi)=sn^2(\omega_2)=\sin^2\theta$ …(28)

$$\psi=F(\Delta,\theta),\quad \omega_2=F(\gamma,\theta) \quad\cdots(29)$$

A~B~C上… $\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)=sn^2(\varphi)=\sin^2\theta$, $\varphi=F(\Delta',\theta)$ …(30)

$\left(\frac{c}{c-1}\right)\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)=sn^2(\omega_1)=\sin^2\Theta$, $\omega_1=F(\gamma',\Theta)$ …(31)

C~D上… $\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)=sn^2(\varphi)=\sin^2\theta$, $\varphi=F(\Delta',\theta)$ …(32)

$\zeta/\zeta=sn^2(\omega_2)=\sin^2\Theta$, $\omega_2=F(\gamma,\Theta)$ …(33)

D~E上… $\alpha/\zeta=sn^2(\psi)=\sin^2\theta$，$\psi=F(\Delta,\theta)$ …(34)

$c/\zeta=sn^2(\omega_2)=\sin^2\Theta$，$\omega_2=F(\gamma,\Theta)$ …(35)

がえられる。

2·3. 未知定数の決定 境界A~B~Cにおいて式(1)および(5)より

$$\left(d\Phi/d\zeta\right)_{ABC}=-N/\sqrt{(\alpha-\zeta)(\zeta-1)(\zeta)} \quad\cdots(36)$$

$$\left(d\Phi/d\zeta\right)_{ABC}+k\varepsilon\left(dy/d\zeta\right)_{ABC}=-M/\sqrt{(c-\zeta)(\zeta-1)(\zeta)} \quad\cdots(37)$$

上二式より $\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)_{ABC}/(k\varepsilon)=v_{ABC}/(k\varepsilon)=\frac{1}{\frac{M}{N}\sqrt{\frac{\alpha-\zeta}{c-\zeta}}-1}$ …(38)

点Bで v_{ABC} の符号は変らねばならないから

$$\frac{M}{N}=\sqrt{\frac{\alpha-b}{c-b}}=\frac{\Delta}{\gamma}\sqrt{\frac{\beta^2-\gamma^2}{\beta^2-\Delta^2}} \quad\cdots(39)$$

一方，式(15)および(18)より

$$\frac{M}{N}=\frac{\Delta}{\gamma}\left(1-\varepsilon\frac{H_1}{h}\right)\frac{K(\Delta')}{K(\gamma')} \quad\cdots(40)$$

式(39)および(40)より

$$\beta^2=\frac{1}{b}=\frac{\gamma^2-\Delta^2\left\{\left(1-\varepsilon\frac{H_1}{h}\right)\cdot\frac{K(\Delta')}{K(\gamma')}\right\}^2}{1-\left\{\left(1-\varepsilon\frac{H_1}{h}\right)\frac{K(\Delta')}{K(\gamma')}\right\}^2} \quad\cdots(41)$$

さらに，点Bでは

$$\sin^2\Theta_B=\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)\left(\frac{b-1}{b}\right)=\frac{\beta'^2}{\Delta'^2},\quad \varphi_B=F(\Delta',\Theta_B) \quad\cdots(42)$$

$$\sin^2\Theta_B=\left(\frac{c}{c-1}\right)\left(\frac{b-1}{b}\right)=\frac{\beta'^2}{\Delta'^2},\quad \omega_{1B}=F(\gamma',\Theta_B) \quad\cdots(43)$$

故に $\varepsilon\frac{s}{h}=\frac{F(\Delta',\Theta_B)}{K(\Delta')}-\left(1-\varepsilon\frac{H_2}{h}\right)\frac{F(\gamma',\Theta_B)}{K(\gamma')}$ …(44)

がえられる。

与えられた $\varepsilon H_2/h$，$\varepsilon l/h$ および $\varepsilon s/h$ に対する基本的未知定数は Δ^2，γ^2 および β^2 の3個であるが，これらは式(20)，(41)および(44)を連立にとくことによって決定される。計算の過程で若干の試算を要するがさほどめんどうではない。

2·4. 淡塩境界面と全浸透流量の算定式 基本的未知定数が確定すると，式(23)および(24)にそれぞれ式(32)および(33)を適用すると，式(20)から淡塩境界面の式は $c\le\zeta\le\alpha$ について

$$\left.\begin{aligned} &\sin^2\Phi=\frac{c}{s}\quad,\quad \sin^2\Theta=\left(\frac{\delta}{\delta-1}\right)\left(\frac{s-1}{s}\right)\\ &\varepsilon\frac{x}{h}=\varepsilon\frac{l}{h}+\left(1-\varepsilon\frac{H_1}{h}\right)\frac{K(\delta)-F(\delta',\Theta)}{K(\delta')}\\ &\varepsilon\frac{y}{h}=-\left(1-\varepsilon\frac{H_1}{h}\right)+\frac{F(\Delta',\theta)}{K(\Delta')}\end{aligned}\right\}\quad\cdots(45)$$

が与えられる。また，浸透流量は単位奥行き当りについて式(17)より求められる。

2·5. 内部流線および等ポテンシャル線　浸透領域内部の流線および等ポテンシャル線を求めるにはψおよびφを$0<\psi<K(\Delta)$および$0<\varphi<K(\Delta')$の範囲で任意に与えてこれに対するω_1およびω_2を知れば事足りる。φおよびψを与えれば式(8)および(9)よりsとγの値が求まり，これを式(13)および(14)に適用してω_1およびω_2を連立にとけばよい。いま，式(13)右辺の第一項をA^2，第二項をB^2とおけば　$A^2-B^2=s$，$2AB=\gamma$が成立するから

$$A=\sqrt{\{\sqrt{s^2+\gamma^2}+s\}/2}\quad,\quad B=\sqrt{\{\sqrt{s^2+\gamma^2}-s\}/2}\quad\cdots(46)$$

となりA，Bの値が求まる。また，AおよびBの定義より　$A\,cn(\omega_2)\,dn(\omega_2)\,sn(\omega_1)\,cn(\omega_1)=B\,sn(\omega_2)\,dn(\omega_1)$

がえられ　$$C=\left[\{B\,dn(\omega_1)\}/\{A\,sn(\omega_1)\,cn(\omega_1)\}\right]^2\quad\cdots(47)$$

とおけば　$$sn(\omega_2)=\sqrt{\frac{(1+\delta^2+C)-\sqrt{(1+\delta^2+C)^2-4\delta^2}}{2\delta^2}}\quad\cdots(48)$$

ω_2を仮定すればこれに対してCが求められω_2が求められる。この仮定が正しいかどうかは

$$\text{検査式：}\quad\frac{sn(\omega_2)\,dn(\omega_1)}{A\{1-dn^2(\omega_2)\,sn^2(\omega_1)\}^2}=1\quad\cdots(49)$$

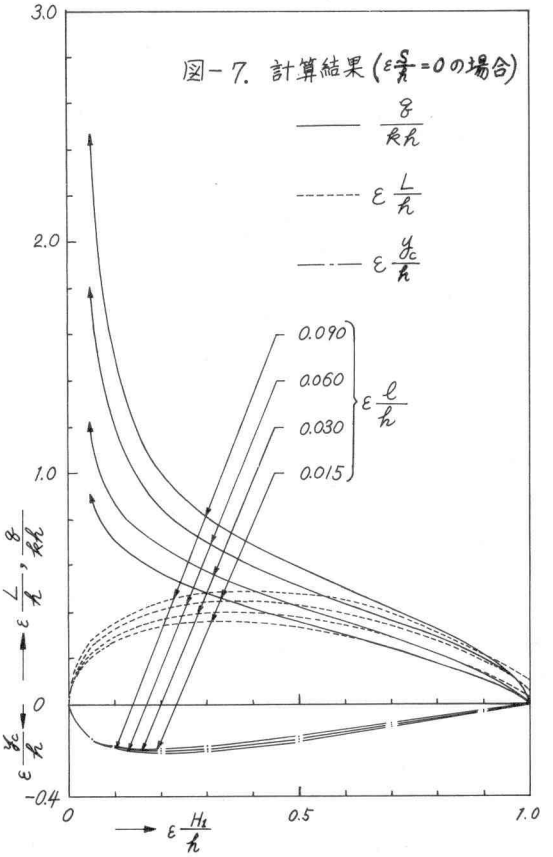
によって確かめられる。このようにして任意に与えられたψおよびφに対するω_1およびω_2が定まればこれに対応するxおよびyの値は式(23)および(24)で定められる。すなわち流線および等ポテンシャル線が画かれる。

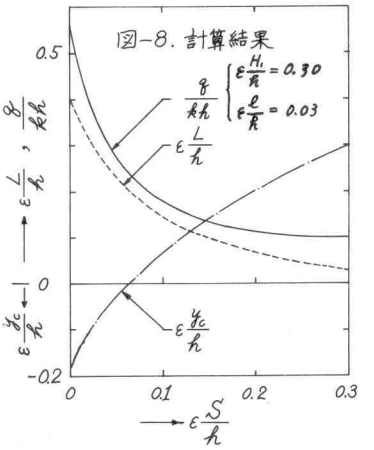
3. 計算および実験による検討　以上の解析結果を検討するために$\varepsilon H_1/h$，$\varepsilon l/h$および$\varepsilon S/h$にいろいろな値を与えて主要な物理量である浸透流量$\delta/(kh)$，砂層面での湧水化領域幅$\varepsilon L/h$および特異点Cの位置$\varepsilon y_c/h$などを計算し，その結果を図－7および図－8に示している。これらについて若干の検討を行なうと，まず$\varepsilon S/h=0$の場合には図－7より，$\varepsilon l/h$を一定にして$\varepsilon H_1/h$を徐々に大きくすると$\varepsilon\delta/h$は徐々に小さくなり，$\varepsilon L/h$および$\varepsilon|y_c|/h$は$\varepsilon H_1/h$のある値のところで最大となる。$\varepsilon H_1/h$を一定にすると$\varepsilon l/h$が大きいほど$\delta/(kh)$，$\varepsilon L/h$および$\varepsilon|y_c|/h$は大きい。

また，図－8より$\varepsilon H_1/h$および$\varepsilon l/h$を一定にして$\varepsilon S/h$を大きくすると$\delta/(kh)$および$\varepsilon L/h$は小さくなり$\varepsilon y_c/h$は大きくなる。これらの結果は定性的には充分推論しうることであるので図-7および図－8の結果からも解析結果は妥当であることが認められよう。

次に，流線および等ポテンシャル線についても数種のものについて計算し，その一例を図－9に示している。流線網は式(49)の検査式が0.9999～1.0001になったところで出された計算結果をもとに画いたものであるが充分妥当に画かれていることから検査式の範囲は上述の程度でよいものと考えられる。なお0.999～1.001の範囲の結果は流線および等ポテンシャル線とも誤差を生じているようである。このことは他の数例の結果からも云える。数値計算は若干のデータ作成以外全て九産大電子計算機 OKITAC 5090 によって行なった。

次に，実験は写真に示しているように最初，過マンガン酸カリウムで着色された塩水で水槽内の砂を完全に飽和しておき，暗きょ部に所定の水頭で湧水を注入し塩水を排除して行なった。湧水注入開始からほぼ4時間程度で実験断面と使用した相馬砂の場合においては定常化した。なお，式(17)に実測のδとhを適用して逆算された相馬砂の透水係数kは0.34 cm/secとなり，この値は筆者が他のいろいろな流れにおいて測定している透水係数とほぼ一致しており，このことからも理論が妥当であると云えよう。



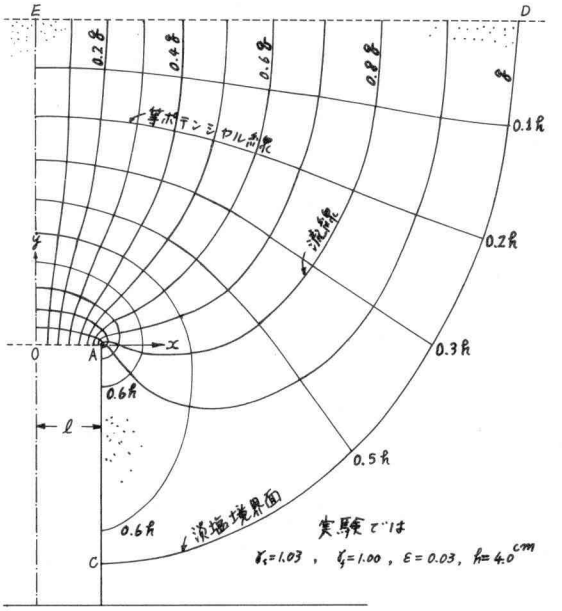


図－9. 計算結果の一例

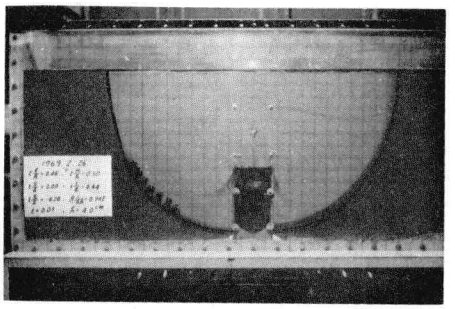
$\Delta^2=0.166$, $\gamma^2=0.406$, $\beta^2=1.000$

$\varepsilon\frac{H_1}{h}=0.300$, $\varepsilon\frac{l}{h}=0.060$, $\varepsilon\frac{S}{h}=0.000$

$\varepsilon\frac{L}{h}=0.440$, $\varepsilon\frac{y_c}{h}=-0.200$, $\frac{g}{k_2 h}=0.701$



(図－9に示す断面に対する実験結果)



(定常化後2時間, 湧水注入開始後6時間の状態)

4. あとがき　本報では図－1に示す流れの予備的流れとして図－2に示す流れを取扱い、若干の検討を行なったが, 図－1の流れについては今後に検討する計画である。実験および計算を手伝ってもらった九産大土木教室　中村淳治, 道永洋一の両君に感謝申し上げる。