

千葉県土木部 正員 ○ 礒板 正昭

九州産業大学 正員 崎山 正常

1. まえがき 水理構造物下の浸透流に起因する噴砂については古くより研究されており、限界動水こう配 i_c は $i_c = h_c/H = (1-\lambda)(\gamma_s/\gamma - 1) \div 1.0$ で示される。ここに h_c は限界水頭差、 H は砂層の厚さ、 γ_s は砂の真比重($\div 2.65$)、 γ は水の比重、 λ は砂層の空隙率($\div 0.40$)である。しかしこの式は動水こう配が砂層内に一様に分布していると仮定して静水学的的に求められたものであり、止水矢板まわりの浸透流に起因する噴砂、また、被圧地下水上部の不透過層に裂目が生じ被圧地下水がこの裂目から浸出したことも一因であると云われている。この地震(1962.2、震度4~6)における噴砂などのように動水こう配が一様でない場合の噴砂については水理学的にもまだ問題が残されていると思う。本報では流れがいわゆるパイピングに至る以前の定常な浸透状態においても動水こう配が急激に変化するところでは局部的に噴砂が起り、その局部の砂層が破壊されると云う経験的現象に着目し、図-1(A)および(B)のような模型について若干の検討を行なった。

2. 二次元流に対する解析 2.1. 長方形浸透領域の解析 流れの場をなるべく一般的に取扱うための区画の特異点と w 面の特異点は一致しない(図-1(C)の場合)について解析し、図-1(A)に適用する。

Schwarz-Christoffelの定理により $z = x + iy = -iM \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t} \sqrt{1-t} \sqrt{b-t}} \dots (1)$

$w = \varphi + i\psi = kH_0 + N \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t} \sqrt{1-t} \sqrt{b-t}} \dots (2)$ がえられる。まず式(1)において

$$t = T^2 = \zeta + i\eta \dots (3), \quad b = 1/\beta^2, \quad \beta^2 = 1 - \beta^2 \dots (4), \quad X = x/(2\beta M), \quad Y = y/(2\beta M) \dots (5)$$

とあくと $X + iY = \int_0^T \frac{dT}{\sqrt{1-T^2} \sqrt{1-\beta^2 T^2}} \dots (6)$, したがって $T^2 = S^2 = S^2(X + iY, \beta) \dots (7)$ ここに S または

は以後にあらわれる sn , dn は Jacobi の楕円関数である。式(7)と(3)を対応させると

$$\zeta = \{ [sn(x)dn(y)]^2 - [cn(x)dn(y)sn(y)cn(y)]^2 / [1 - dn^2(x)sn^2(y)]^2 \} \dots (8), \quad \eta = 2sn(x)dn(y)cn(x)dn(y)sn(y)cn(y) / [1 - dn^2(x)sn^2(y)]^2 \dots (9)$$

ただし、 X および Y に関する母数は β および β'^2 である。

$$sn(0, \beta) = 0, \quad cn(0, \beta) = 1, \quad dn(0, \beta) = 1$$

$$sn(K, \beta) = 1, \quad cn(K, \beta) = 0, \quad dn(K, \beta) = \beta'$$

$$\dots (10)$$

ここに K は β を母数とする第一種完全楕円積分 $K(\beta)$ である。

点 A では $\zeta = 1, \eta = 0$,

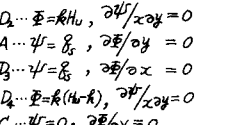
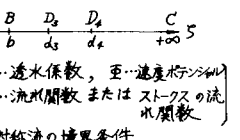
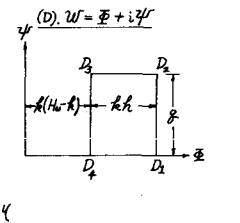
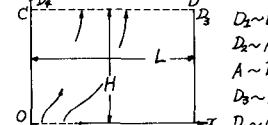
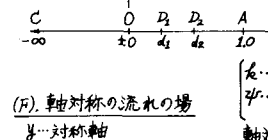
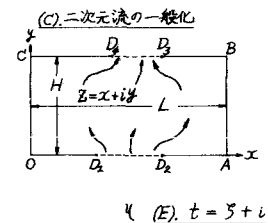
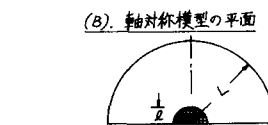
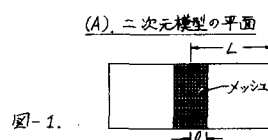
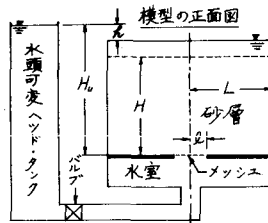
$Y = 0, X = L/(2\beta M)$ であるから

$$\text{式(8)より } L/(2\beta M) = K(\beta) \dots (11)$$

同様に点 C にあいて

$$H/(2\beta M) = K(\beta') \dots (12)$$

$$\text{故に } L/H = K(\beta)/K(\beta') \dots (13)$$



すなわち L/H を与えたと β が求まり、 L または H を与えたと式(11)または(12)で M が求まる。境界 ($\eta=0$) における S の式は式(8)および(10)を用いて

$$O \sim A \text{ 上 } \dots S = S^2(X) \dots (14); A \sim B \text{ 上 } \dots S = \frac{1}{dm^2(Y)} \dots (15)$$

$$B \sim C \text{ 上 } \dots S = \frac{1}{\beta^2 S^2(X)} \dots (16); C \sim O \text{ 上 } \dots S = -\frac{S^2(Y)}{dm^2(Y)} \dots (17)$$

上式(14)~(17)より w 面上の特異点 $D_2 \sim D_4$ に対応する S の値 $d_2 \sim d_4$ が求められる。次に式(2)において

$$T_w^2 = \left(\frac{d_2 - d_1}{d_2 - d_1} \right) \left(\frac{d_1 - t}{d_2 - t} \right) = \left(\frac{d_2 - d_1}{d_2 - d_1} \right) \frac{\{(d_1 - S)(d_2 - S) + \eta^2\} - i(d_2 - d_1)\eta}{(d_2 - S)^2 + \eta^2} \dots (18)$$

$$K^2 = \left(\frac{d_2 - d_1}{d_2 - d_1} \right) \left(\frac{d_1 - d_1}{d_2 - d_1} \right), \quad K^2 = 1 - K'^2, \quad \eta = \frac{\sqrt{(d_2 - d_1)(d_2 - d_1)}}{2} \dots (19)$$

$$\eta(RH_0 - \frac{1}{2})/N = \varphi, \quad \eta L/N = \psi \dots (20)$$

とあくと $T_w^2 = S^2(\varphi - i\psi, K')$... (21) が与えられる。式(18)と(21)とに対応させる

$$\frac{(d_1 - S)(d_2 - S) + \eta^2}{(d_2 - S)^2 + \eta^2} = \left(\frac{d_2 - d_1}{d_2 - d_1} \right) \left\{ \frac{\{S^2(\varphi)dm^2(\psi)\}^2 \{om(\varphi)dm(\varphi)S^2(\psi)om(\psi)\}^2}{\{1 - dm^2(\varphi)S^2(\psi)\}^2} \right\} \dots (22)$$

$$\frac{\eta}{(d_2 - S)^2 + \eta^2} = \left(\frac{d_2 - d_1}{d_2 - d_1} \right) \left\{ \frac{2S^2(\varphi)dm(\varphi)om(\varphi)dm(\varphi)S^2(\psi)om(\psi)}{\{1 - dm^2(\varphi)S^2(\psi)\}^2} \right\} \dots (23)$$

ただし φ および ψ の母数は K' および K である。点 D_2 では $S = d_2$, $\eta = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = \psi_0/N$ であるから式(22)より $\psi_0/N = K(K) \dots (24)$; 同様に点 D_4 においては

$$\psi_0 R/N = K(K') \dots (25); \quad \text{したがって}$$

$$R/R_0 = K(K)/K(K') \dots (26)$$

式(26)より R と R_0 を与えて浸透流量 Q が求まり、式(24)

または(25)より N が求まる。内部の流線および等ポテンシヤル線は求めるには φ および ψ を与えて、これ

に対応する X および Y を知れば事足りる。まず $0 \leq \psi \leq K(K)$, $0 \leq \varphi \leq K(K')$ の範囲で任意に φ および ψ を与えたと式(22)および(23)の右辺の値 R_{22} および R_{23} が定まるから

$$S = \frac{d_1 \{R_{23}^2(d_1 - d_2)^2 - (1 - R_{22})^2\} + (d_1 - d_2)(1 - R_{22})}{R_{23}^2(d_1 - d_2)^2 - (1 - R_{22})^2} \dots (27)$$

$$\eta = \frac{\sqrt{R_{22}(d_2 - S) - (d_1 - S)(d_2 - S)}}{(1 - R_{22})} \dots (28)$$

が求まり、次に式(8)の右辺第一項を A^2 , 第二項を B^2 とおけば式(8)および(9)より $A^2 - B^2 = S$, $2AB = \eta$... (29)

故に $A = \sqrt{\{S^2 + \eta^2 + S\}/2}$, $B = \sqrt{\{S^2 + \eta^2 - S\}/2}$... (30)

とあって A および B の値が求まる。そこで式(8)と前述 A および B の定義から

$$A om(X) dm(X) S^2(Y) om(Y) = B S^2(X) dm(Y) \dots (31) \quad \text{となるから}$$

$$C = \{B dm(Y) / \{A S^2(Y) om(Y)\}\}^2 \dots (32) \quad \text{とあって}$$

$$S^2(X) = \sqrt{\{(1 + \beta^2 + C)^2 - \sqrt{(1 + \beta^2 + C)^2 - 4\beta^2}\} / (2\beta^2)} \dots (33)$$

がえられる。すなわち、 Y を仮定すれば式(32)より C が定まり式(33)より X が定まるがこの Y の仮定値

$$の正否は検査式; \quad S^2(X) dm(Y) / \{A \{1 - dm^2(X) S^2(Y)\}\} = 1.0 \dots (34)$$

で check することによって確かめられる。このようにして定められた砂層内の任意の点 (X, Y) における動水こう配は次のようにして求められる。なお

および V を X および Y の負方向の流速とすれば

$$U = \partial \psi / \partial X = \partial^2 \psi / \partial X^2, \quad V = \partial \psi / \partial Y = -\partial^2 \psi / \partial X \partial Y \dots (35)$$

$$(dw/dz)^2 = (U - iV)^2 = U^2 - V^2 - i(2UV) \dots (36) \quad \text{一方、式(1)}$$

$$\text{および(2)より } (dw/dz)^2 = \left(\frac{N}{M} \right)^2 \frac{(t)(1-t)(b-t)}{(d_1-t)(d_2-t)(d_3-t)(d_4-t)} \dots (37)$$

上式の M, N に式(12)および(25)の関係を用いて、さらに式(37)の右辺を虚部と実部に分離して式(36)

と対応させれば $U = (U/R) / (R/H) = \sqrt{\{ \sqrt{D^2 + E^2} - D \} / 2} \dots (38)$

$$V = (V/R) / (R/H) = \sqrt{\{ \sqrt{D^2 + E^2} - D \} / 2} \dots (39), \quad G = \sqrt{U^2 + V^2} \dots (40)$$

ただし $D = K_2(K_2 K_4 - \eta^2 K_3 K_5) / K_6$, $E = -\eta K_1(K_2 K_5 + K_3 K_6) / K_6$

$$K_1 = \{(d_1 - d_1)(d_2 - d_2) / b\} \{K(\beta) / K(\eta)\}^2, \quad K_2 = \{S(1-S) + \eta^2(b-S) + (1-2S)\eta^2$$

$$K_3 = (1-2S)(b-S) - \{S(1-S) + \eta^2\}, \quad K_4 = \{(d_1 - S)(d_2 - S) - \eta^2\} \{(d_3 - S)(d_4 - S) - \eta^2\}$$

$$- (d_1 + d_2 - 2S)(d_3 + d_4 - 2S)\eta^2, \quad K_5 = \{(d_1 - S)(d_2 - S) - \eta^2\} \{(d_3 + d_4 - 2S)$$

$$+ (d_3 - S)(d_4 - S) - \eta^2\} \{(d_1 + d_2 - 2S)\eta^2\}, \quad K_6 = \{(d_1 - S)^2 + \eta^2\} \{(d_2 - S)^2 + \eta^2\}$$

$$\cdot \{(d_3 - S)^2 + \eta^2\} \{(d_4 - S)^2 + \eta^2\} \dots (41) \quad \text{である。すなわち}$$

砂層内任意の点における動水こう配が求められる

各境界 ($\eta=0$) においては式(22)より

$$D_2 \sim D_3 \text{ 上 } \dots S = \frac{d_1(d_2 - d_2) + d_2(d_2 - d_1) S^2(\varphi)}{(d_2 - d_2) + (d_2 - d_1) S^2(\varphi)} \dots (42)$$

$$D_2 \sim D_3 \text{ 上 } \dots S = \frac{d_2(d_2 - d_1) - d_1(d_2 - d_2) S^2(\varphi)}{(d_2 - d_1) - (d_2 - d_2) S^2(\varphi)} \dots (43)$$

$$D_3 \sim D_4 \text{ 上 } \dots S = \frac{d_2(d_2 - d_1) - d_1(d_2 - d_2) S^2(\varphi)}{(d_2 - d_1) - (d_2 - d_2) S^2(\varphi)} \dots (44)$$

$$D_4 \sim D_1 \text{ 上 } \dots S = \frac{d_1(d_2 - d_2) - d_2(d_2 - d_1) S^2(\varphi)}{(d_2 - d_2) - (d_2 - d_1) S^2(\varphi)} \dots (45)$$

がえられるから、まず φ または ψ を与えてこれに

対する S の値を式(42)~(45)で求め式(14)~(17)で X

または Y を求めれば式(41)の各式で $\eta=0$ とおくことにより $U = \sqrt{D}$, $V = \sqrt{-D}$... (46) とは $\eta=0$ と容易に

各境界における物理量を求めることがでる。

2.2. 半無限帯状領域への拡張 図-1(C)の上面

が X の正方向に無限に延びた領域は点 A と B が X

$= \infty$ と一致した場合と考えてよい。したがって 2.1

の解析結果で $b = 1/2 = 1/(1 - \beta^2) = 1.0$, $K(\beta) = \infty$, $K(\beta) = 1/2$

$\sin(\xi, 1) = \tanh \xi$, $\sin(\xi, 0) = \sinh \xi$ などの関係を用いて
 所要の式を書きかえれば直ちにこの場合に拡張適用
 することが出来る。

2.3. 面無限帯状領域への拡張 さらにZ面がXの
 正負両方向に無限に延びた領域は点AとBが $x=\infty$
 で点CとDが $x=-\infty$ で一致した場合と考える。
 したがってこの場合にはX, Y軸の原点を適当な位置
 にずらひかえ、その原点を $t=0$, $x=\infty$ を $t=1$ に対
 応させると式(1)のかかりに

$$Z = X + iY = M \int_0^{t-1} \frac{dt}{1-t} = -M \{ \ln(t-1) - i\pi \} \quad \dots (27)$$

上式より若干の演算のうちに

$$X = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{1-(t-1)^2 + \pi^2} \right) \dots (28); \quad Y_{21} = \pi \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\pi}{t-1} \right) \dots (29)$$

$$Y_{21} = \tan^{-1} \left(\frac{\pi}{t-1} \right) \dots (30); \quad X = \pi/4, \quad Y = \pi/4 \quad \dots (31)$$

がえられる。また式(28)で $t=0$ とくと上辺および
 下辺の5の式がえられる。すなわち

$$\text{上辺} \dots S = 1 + e^{-X}; \quad \text{下辺} \dots S = 1 - e^{-X} \quad \dots (32)$$

上式から $d_1 \sim d_4$ を求めることが出来る。領域内部の
 物理諸量は、まず t および φ を t 式(27)および(28)
 で X および Y を求め、これを式(48)~(50)に適用すれば
 X および Y が求められる。これに対応する動水こ
 う配は式(38)~(41)で求められる。ただしこの場合
 $K_1 = (d_1 - d_2)(d_3 - d_4) \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \right) / K(X) \right\}^2$, $K_2 = (1 - S)^2 \pi^2$, $K_3 = 2(S - 1) \dots (41)$
 となる。境界($t=0$)においては t または φ を t と
 式(42)~(45)で5の値を求め、式(52)で X の値を求め
 ると対応する点 t の動水こう配は式(46)で求められる。

3. 軸対称流に対する数値解析

軸対称流の場合には
 $u = \partial \psi / \partial x = \partial^2 \psi / \partial x \partial y$, $v = \partial \psi / \partial y = -\partial^2 \psi / \partial x \partial x \dots (53)$
 $\partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2 + \partial^2 \psi / \partial x \partial x = 0$, $\partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2 - \partial^2 \psi / \partial x \partial x = 0 \dots (54)$
 が成立する。ただしこの場合の ψ はStokesの流関関
 数である。式(53)の一般解はLegendreの多項式を用い
 て表わされるが図-1(F)に示す境界条件にこの一般
 解を適合させることは筆者らには難事と考へられた
 ので数値解を試みた。まず

$$\varphi = \pi / (2R_1), \quad \tau = \pi / (2R_2 H) \quad \dots (55)$$

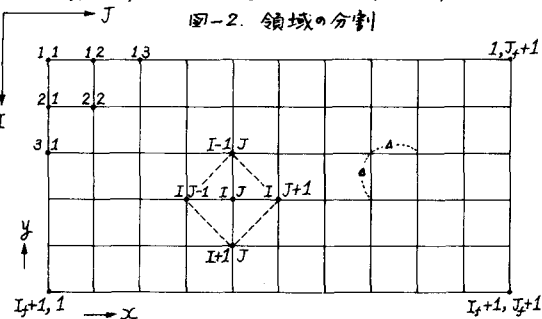
$$X = x/H, \quad Y = y/H \quad \dots (56)$$

による無次元化を行なうと

$$U = (\psi/H) / (R_1/H) = \partial^2 \psi / \partial x \partial y, \quad V = (\psi/H) / (R_2/H) = \partial^2 \psi / \partial y \partial x \dots (57)$$

$$\partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2 + \partial^2 \psi / \partial x \partial x = 0, \quad \partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial y^2 - \partial^2 \psi / \partial x \partial x = 0 \dots (58)$$

もまた成立する。これを図-2によって差分式で



あらわすと

$$U_{IJ} = \frac{1}{2\Delta} \{ \varphi_{I-1, J+1} - \varphi_{I+1, J-1} \} = \frac{1}{2(\Delta-1)\Delta^2} \{ \tau_{I-1, J} - \tau_{I+1, J} \} \dots (59)$$

$$V_{IJ} = \frac{1}{2\Delta} \{ \varphi_{I+1, J} - \varphi_{I-1, J} \} = -\frac{1}{2(\Delta-1)\Delta^2} \{ \tau_{I, J+1} - \tau_{I, J-1} \}$$

$$\varphi_{IJ} = \frac{1}{4} \left\{ \varphi_{I-1, J} + \left[1 - \frac{1}{2(\Delta-1)} \right] \varphi_{I, J-1} + \varphi_{I+1, J} + \left[1 + \frac{1}{2(\Delta-1)} \right] \varphi_{I, J+1} \right\} \dots (60)$$

$$\tau_{IJ} = \frac{1}{4} \left\{ \tau_{I-1, J} + \left[1 + \frac{1}{2(\Delta-1)} \right] \tau_{I, J-1} + \tau_{I+1, J} + \left[1 - \frac{1}{2(\Delta-1)} \right] \tau_{I, J+1} \right\}$$

がえられる。式(60)を逐次加速緩和法(successive over-
 relaxation method ...以下SOR法と云う)の式で書くと

$$\varphi_{IJ}^m = (\omega/4) \left\{ \varphi_{I-1, J}^{m-1} + \left[1 - \frac{1}{2(\Delta-1)} \right] \varphi_{I, J-1}^{m-1} + \varphi_{I+1, J}^{m-1} + \left[1 + \frac{1}{2(\Delta-1)} \right] \varphi_{I, J+1}^{m-1} \right\} - (\omega-1) \varphi_{IJ}^{m-1} \dots (61)$$

がえられる。 τ_{IJ}^m についても同様な式に代る。こ
 んに m は計算の回数で φ_{IJ}^m は格子点 I, J における m
 回目の φ_{IJ} のことである。 I_4 および J_4 は領域の縦
 および横の分割の個数といたとき加速定数(over-
 relaxation factor) ω の値に

$$\mu = \frac{(I_4+1)^2 \cos(\pi/I_4+1) + (J_4+1)^2 \cos(\pi/J_4+1)}{(I_4+1)^2 + (J_4+1)^2} \dots (62)$$

$$\omega = 1 + \frac{\mu}{(1 + \sqrt{1 - \mu^2})^2}$$

を適用すれば $\omega=1.0$ としたGauss-Seidel iteration
 methodによる反復回数の少なくなると半分のあむと
 云う文献²⁾があるが ω の最適値について今後と
 も検討する計画である。各格子点 φ_{IJ} および τ_{IJ} は、
 はじめに常識値を仮定しておき式(61)で反復計
 算を行なうとむずう収束する。この結果に基づいて
 軸対称流において図-4(C)に示すように二次元

图-3. 軸対称
流量算定

$$\frac{Q/(2\pi R)}{R R} = \lambda \cdot \frac{m}{n} \dots (63), \quad (\lambda = \frac{a}{b}, \lambda R = \text{const})$$

によって求められる。ここに Q は等ポテンシアル線の平均長さ、 b は流線の平均長さ、 n は流入出部のポテンシャルの差の等分數、 m は流量 Q の等分數である。他の網目について check するとやはり $\lambda R = \text{const}$ なることを確かめればよい。なお、 $q_{I,J}$ および $t_{I,J}$ の何れか一つを反復計算によって収束させれば他の一つは式(57)を積分して求められる計算はむしろ両方別々に反復計算するよりもはやい。本報では反復回數など甚だ検討するため別々に収束させてみた。

4. 計算および実験 以上の解析結果を検討する
ために数値的計算のものに対して計算および砂槽型に
よる実験を行なった。計算は若干のデーター作成以外
全て九重電子計算機 OKITAC 5090 によった。その
一部を図-4 および写真に例示している。これらによる
と解析結果は何れも妥当なようである。なお、図-4(B)に
は解析解のほか、SOR法による数値解の結果も示してい
るがこれは $I_2 = 25$, $I_2 = 50$ で誤差 $\leq 1/4\%$ まで収束され
結果である。解析解の結果は式(39)の複素式が 0.9999 ~
1.0001 の範囲で結果が与えられている。解析解と数値解に要
する時間と労力は数値解による方が格段に少なくて済むよ
うである。次に図-4の各流域内には $U=1.0$, $V=1.0$
あるいは $Q=1.0$ の等動水こう配の線を示しているが、これらの水
より外側の領域では Darcy の動水こう配は砂層厚まで平均化
された動水こう配 h/H より大さ。すなわち h/H が 1.0 に達する
以前に Darcy の動水こう配は 1.0 に達する領域 があり、噴
砂がいわゆるノイズゾーンに達しないまでも砂地盤の内部砂
層に対しては充分注意を要する領域であると考へる。この

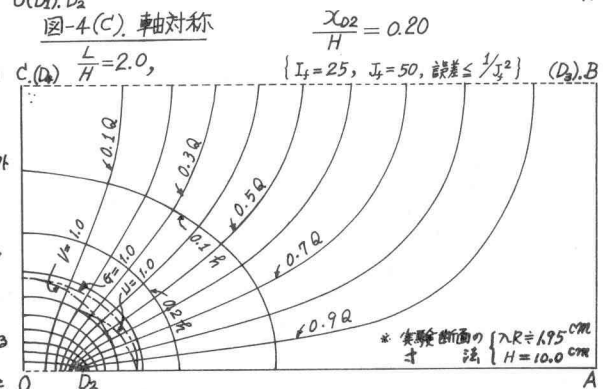
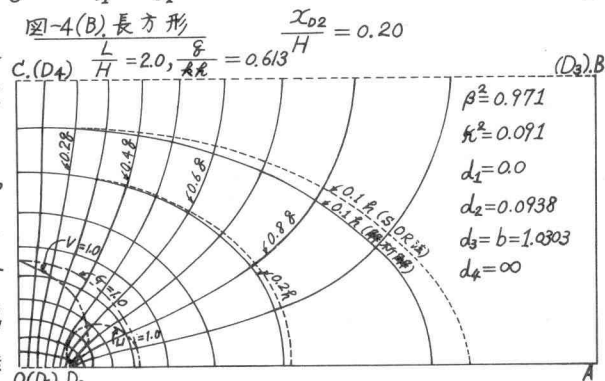
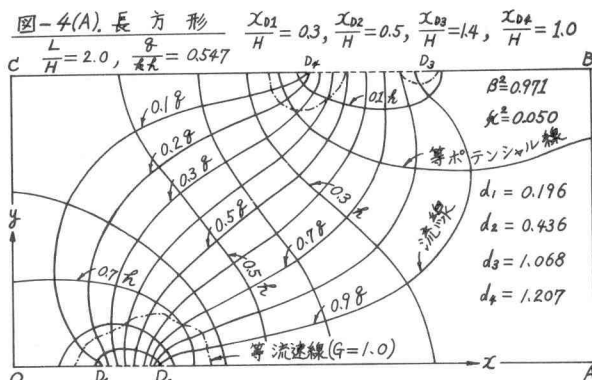
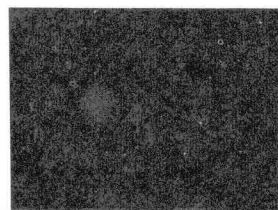
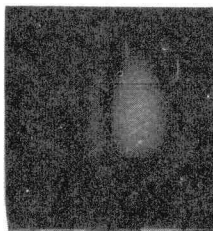


写真-1. 軸対称内部破壊 $P/H=1.0$

写真-2. 軸対称ハイヒョング
 $R/H \approx 3.0$



ことは実驗によつては「確認」され一例も早急に示している。今後は噴砂の規定するであらう L/H , Q/H , 砂の粒径など種々100mm- γ について検討したいと考へている。 元南次

2) 友近晋「液体力学」, 英亚出版, pp.180-181
3) ASCE, Hy. Div. V1967, pp. 12-27.