

九州大学工学部 正員 上田年比古
〃 〃 〇杉尾 哲

1. まえがき

本報は排水問題によくみられる図-1 に示すような帯状に水平に広がった浸透領域の底部の不透水層の一部にほられた長方形のみぞの部分(以上の断面をここでは複合断面とよんだ)に、円形暗きよが埋設され、領域上面は湛水で被われ、暗きよ内は水で満たされている場合の暗きよ排水量(または取水量)の算定についてのべたものである。

この場合の解析手段として、等角写像の繰返しにより、与えられた複合断面の浸透領域を簡単な領域に写像して暗きよ排水量を求める方法と、複合断面の帯状に長い領域と埋込部の長方形領域に分けて、おのおのの浸透流量の算定式を複素ポテンシャルの理論より導き、これらが等しい値を持つことより暗きよ排水量を求める方法とがある。

オ-の等角写像の繰返しによる算定方法はかなり複雑であり、現場での使用は困難と考えられる。したがって、オ-の方法による算定結果の近似の程度がよければ、より簡単に算定できることになる。ここではこの二つの算定法による結果を比較検討したものである。

2. 写像の繰返しによる排水量の計算

○領域の写像 図-1 (Z-平面) の浸透領域と図-2 (ζ-平面) の上半面との間の写像関数はζ-平面のC点で $\zeta = 1/(m \cdot \sin \alpha)$ と表わされるような実定数 α を考えると、Schwarz-Christoffel の変換より

$$Z = M \int_0^{\zeta} \left(\frac{1-m^2 \zeta^2}{1-\zeta^2} \right) \frac{d\zeta}{1-m^2 \sin^2(\alpha, m) \cdot \zeta^2} \quad \text{----- (1)}$$

ここには m は $\sin$ 関数の母数で、 M は実定数とする。

次に、この図-2 の上半面と図-3 (Z'-平面) の長方形領域内との写像関数は $\sin$ 関数を使って次式のようにあらわされる。

$$\zeta = \sin(Z', m) \quad \text{----- (2)}$$

なお、図-3 の K, K' はそれぞれ母数 $m, m' (= \sqrt{1-m^2})$ に関するオ-種完全楕円積分とする。

筆者等はこの図-3 の有限流入部をもつ長方形領域内にある暗きよへの流入量の算定式をすでに求めている¹⁾。したがって式-(1), (2) の写像関数を使って図-1 の浸透領域から図-3 の長方形領域が決定できれば、図-1 の浸透領域の暗きよ排水量を求めることができる。

式-(2)に式-(1)を代入すると、

$$Z = M \int_0^Z \frac{1-m^2 \sin^2(Z', m)}{1-m^2 \sin^2(\alpha, m) \cdot \sin^2(Z', m)} dZ' \quad \text{----- (3)}$$

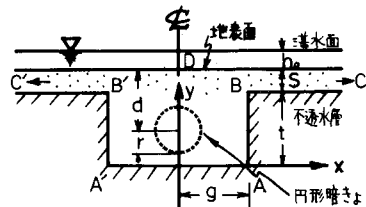


図-1 Z-平面

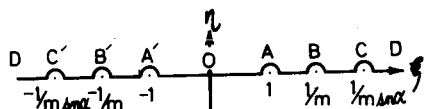


図-2 ζ-平面

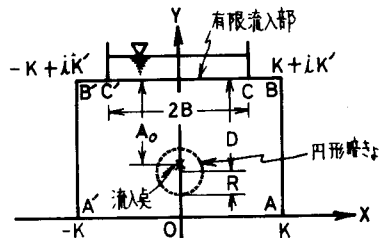


図-3 Z'-平面

さらに式(3)をオ三種楕円積分²⁾ $\Pi(Z, \alpha, m)$ を使って変形すると.

$$Z = M \left[Z - \frac{cn(\alpha, m)}{sn(\alpha, m) \cdot dn(\alpha, m)} \Pi(Z, \alpha, m) \right] \quad \text{----- (4)}$$

$$\text{ここに} \quad \Pi(Z, \alpha, m) \equiv m^2 \cdot sn(\alpha, m) \cdot cn(\alpha, m) \cdot dn(\alpha, m) \cdot \int_0^Z \frac{sn^2(Z, m)}{1 - m^2 sn^2(\alpha, m) \cdot sn^2(Z, m)} dZ$$

○未知数 M, m, α の算定 まず Z -平面の S の長さを求めると、式(4)より

$$\text{虚軸に沿う } \overline{OD} \text{ の長さ} \quad S + it = M \{ K' + (cn\alpha / sn\alpha \cdot dn\alpha) \{ \pi/2 - K'Z(\alpha) - \pi\alpha/2K \} \} \quad \text{----- (5)}$$

$$\overline{AB} \text{ の長さ} \quad t = M \{ K' - (cn\alpha / sn\alpha \cdot dn\alpha) \{ KZ(\alpha) + \pi\alpha/2K \} \} \quad \text{----- (6)}$$

$$[\text{式(5)}] - [\text{式(6)}] \text{ より} \quad S = M \cdot (\pi/2) \cdot (cn\alpha / sn\alpha \cdot dn\alpha) \quad \text{----- (7)}$$

$$\text{ここに } Z(\alpha) \text{ は Jacobi の Zeta 関数で} \quad Z(\alpha) = E(\alpha) - E \cdot \alpha / K \quad \text{----- (8)}$$

$E(\alpha)$ はオ二種楕円積分, E はオ二種完全楕円積分である。

次に図-1のB点について考えると、式(4)より

$$g + it = M \{ K + iK' - (cn\alpha / sn\alpha \cdot dn\alpha) \cdot \Pi(K + iK', \alpha, m) \} \quad \text{----- (9)}$$

$$\text{ここに} \quad \Pi(K + iK', \alpha, m) \equiv (K + iK') \cdot Z(\alpha) + i\pi\alpha/2K \quad \text{----- (10)}$$

式(9)と式(10)に代入し、式(4)で割って実数部と虚数部にわけると、

$$g/S = (2/\pi) \cdot K \{ sn\alpha \cdot dn\alpha / cn\alpha - Z(\alpha) \} \quad \text{----- (11)}$$

$$t/S = (2/\pi) \cdot K' \{ sn\alpha \cdot dn\alpha / cn\alpha - Z(\alpha) \} - \alpha/K \quad \text{----- (12)}$$

この式(11)と式(12)を同時に満足する m, α を求めればよい。

いま求めやすくするために、式(11)と式(12)に代入すると次式がえられる。

$$\alpha = (gK' - tK) / S \quad \text{----- (13)}$$

したがって、母数 m の値を仮定して、 K, K' および E の値を求め、式(13)から α 、式(8)から $Z(\alpha)$ を計算して、これらを式(11)に代入し、求めた左辺の値が右辺の値と一致するまで計算を繰返す。

以上のようにして求めた m, α を式(6)に代入すれば M の値が求まる。なお、以上の計算において、

$K, K', E, E(\alpha)$ および $sn\alpha$ 等の値は概略であれば数表³⁾からも読み取れる。

○流入量の算定 式(2)の逆関数 $F(\xi, m)$ すなわちオ一種楕円積分において $1/mu = \xi$ とすると

$$(\overline{BC})_Z = \int_{1/m}^{1/m \cdot sn\alpha} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2} \sqrt{1-m^2\xi^2}} = \int_{sn\alpha}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2} \sqrt{1-m^2u^2}} = K - F(sn\alpha, m)$$

となるから、図-3における有限流入部の長さ $2B$ は次式で与えられる。

$$(CC')_Z = 2B = 2F(sn\alpha, m) = 2\alpha \quad \text{----- (14)}$$

次にオ三種楕円積分は

$$\Pi(iu, \alpha, m) \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{\Theta(iu - \alpha)}{\Theta(iu + \alpha)} + iuZ(\alpha) = i \left\{ \tan^{-1} \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \sin \frac{n\pi\alpha}{K} \sinh \frac{n\pi u}{K}}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos \frac{n\pi\alpha}{K} \cosh \frac{n\pi u}{K}} + uZ(\alpha) \right\} \quad \text{----- (15)}$$

ここに $\Theta(iu \pm \alpha)$ は Jacobi の Theta 関数で

$$\Theta(v) = \vartheta_4 \left(\frac{v}{2K} / \frac{ik'}{K} \right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos(n\pi v/K), \quad q = e^{-\frac{K'}{K}\pi}$$

したがって、 Z -平面の虚軸上の任意点に対応する Z -平面の虚軸上の位置は、式(4)に式(15)を代入すれば決定できる。そこで、あらかじめ式(4)、(15)を使って Z -平面と Z -平面との虚軸上の位置の対応関

係を計算しておのおのの境界でグラフ化しておき、排水量の計算の際には、与えられたZ-平面内の暗まよに対するZ'-平面内の暗まよの位置をこれから読みとれるようにしておいた。

以上よりZ'-平面は決定され、これらの値をZ'-平面の暗まよ流入量の算定式に代入すれば、Z'-平面の暗まよ排水量が算定できる。

ここに図-3 (Z'-平面) に示す長方形領域内の誘素ポテンシャルは

$$W = \mu \ln \frac{\phi_n(Z, m') / \sqrt{\Delta c^2(B, m) + \Delta n^2(Z, m')} - \phi_n(A_0, m') / \sqrt{\Delta c^2(B, m) + \Delta n^2(A_0, m')}}{\phi_n(Z, m') / \sqrt{\Delta c^2(B, m) + \Delta n^2(Z, m')} + \phi_n(A_0, m') / \sqrt{\Delta c^2(B, m) + \Delta n^2(A_0, m')}} + \mu' \quad (16)$$

であらわされるから、Z'-平面の暗まよ周壁と流入部(CD')との間の速度ポテンシャル差を、Z'-平面の暗まよ周壁と地表面との間の速度ポテンシャル差に等しくとると、Z'-平面の暗まよ流入量の算定式¹⁾は

$$Q/k\Delta H = 2\pi / \ln \frac{\phi_n(D+R, m') / \sqrt{\Delta c^2(B, m) + \Delta n^2(D-R, m')} + \phi_n(D-R, m') / \sqrt{\Delta c^2(B, m) + \Delta n^2(D+R, m')}}{\phi_n(D+R, m') / \sqrt{\Delta c^2(B, m) + \Delta n^2(D-R, m')} - \phi_n(D-R, m') / \sqrt{\Delta c^2(B, m) + \Delta n^2(D+R, m')}} \quad (17)$$

ここに ΔH は暗まよ周壁と地表面との水頭差で $\Delta H = h_0 + d - (p_0/\rho g)$, p_0 は暗まよ中心の圧力。

3. 近似解法による排水量の計算

以上の暗まよ排水量の算定方法は非常に複雑であり、以下に近似的な取扱い方を算定式を求めてみよう。いま図-1の浸透領域において、上部の帯状に無限に広い領域と下部の長方形領域(埋込部)との境界(BB')を等ポテンシャル線であると仮定すると、図-1の浸透領域を上部と下部に分割し、図-1の流れをこれら二つの独立した浸透領域内の流れとして別々に解析できる。⁴⁾

○上部の帯状領域

図-1の浸透領域は左右対称だから、ここでは図-5のように帯状領域の右半分の領域だけを考える。

この帯状領域を、水平方向に無限に長い長方形領域と考えるとZ'-平面の上半面に写像する写像関数は次式であらわされる。

$$t = \phi_n\left(\frac{\pi z}{2S}, 1\right) = \tanh \frac{\pi z}{2S} \quad (18)$$

ここにZ'-平面のB'点の値は式(18)から

$$\beta = \tanh^2(\pi g/2S) \quad (19)$$

次に、Z'-平面からZ-平面への写像関数は双一次変換式より

$$\zeta = \frac{1}{1-\beta} \cdot \frac{t-\beta}{t} \quad (20)$$

$t = \infty$ を $\zeta = 1/m_I^2$ に対応させれば上式より

$$m_I^2 = 1-\beta = 1/\cosh^2(\pi g/2S) \quad (21)$$

さらに、Z-平面を次式で写像すると、W-平面を得る。

$$\zeta = \phi_n^2\{(W-\Phi_d) \cdot KI'/\Delta\Phi, m_I\} \quad (22)$$

なお、式中の母数 m_I の値は式(21)より与えられる。

ここにW-平面の長方形の縦横の長さの比 $\Delta\psi/\Delta\Phi$ は m_I および m_I'

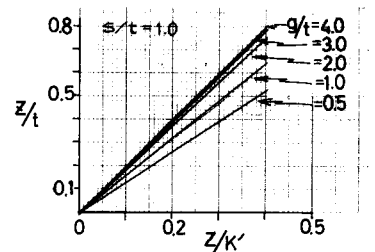


図-4 虚軸上の対応関係

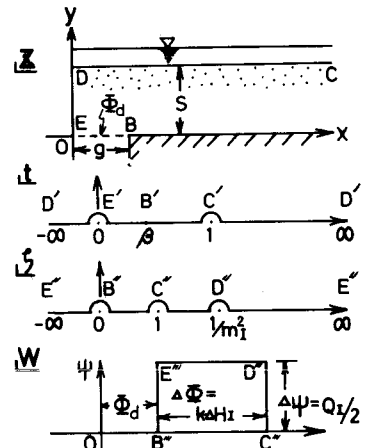


図-5 帯状領域の写像

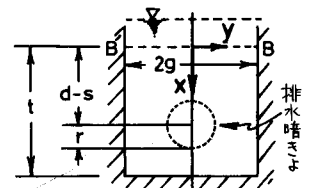


図-6 長方形埋込部の領域

($=\sqrt{1-m^2}$) に関する第一種完全楕円積分の比 K'_I/K_I に等しいから、 $\Delta\psi=Q_I/2$, $\Delta\Phi=k\Delta H_I$ とおくと、

$$Q_I/k\Delta H_I = 2K'_I/K_I \quad \dots\dots\dots (23) \quad (\Delta H_I \text{ は } \overline{DC} \text{ と } \overline{EB} \text{ との間の水頭差を示す。})$$

○下部の長方形埋込部

図-6の暗まよ排水量の算定式は、式(17)において $D \pm R \Rightarrow (d-s \pm r) \cdot K_{II}/t$, ΔH を $\overline{BB'}$ と暗まよ同壁との間の水頭差 ΔH_I , [流入部の幅 B] = [領域幅 L] となつて $ac(B, m) = ac(K, m) \Rightarrow \infty$ と置いた式と一致する。なお、この場合の sn 関数の母数は、図-6の縦横の長さの比が $q/t = K'_{II}/K_{II}$ となるような第一種完全楕円積分の母数と同値で、 m_{II} であらわすものとする。

●暗まよ排水量の算定式

求める暗まよ排水量を Q とおくと、連続の条件より

$$Q = Q_I = Q_{II}$$

また暗まよ同壁と地表面との水頭差を ΔH とすれば

$$\Delta H = \Delta H_I + \Delta H_{II}$$

であるから整理すると

$$Q/k\Delta H = 2\pi / \left(\frac{\pi K_I}{K'_I} + \ln \frac{\sqrt{\sin\left\{\frac{K_I}{t}(d-s+r), m_{II}\right\}} + \sqrt{\sin\left\{\frac{K_{II}}{t}(d-s-r), m_{II}\right\}}}{\sqrt{\sin\left\{\frac{K_I}{t}(d-s+r), m_{II}\right\}} - \sqrt{\sin\left\{\frac{K_{II}}{t}(d-s-r), m_{II}\right\}}} \right) \quad \dots\dots\dots (24)$$

この式(24)が暗まよ排水量の近似的な算定式である。

4. 算定式の検討

0.5 $\leq q/t \leq 4.0$ の範囲の式(17), (24)の算定結果を図-7と砂モデルの実験結果と比較している。これによると式(17)の算定結果は実験結果とほぼ一致しており、式(17)は図-1の浸透領域の暗まよ排水量を求める算定式として、ほぼ満足できる結果を与えるものであるといえよう。また式(17)と式(24)との算定結果は非常に小さな q/t の小さな暗まよの場合に一致し、 q/t が大きくなるにつれて算定誤差が大きくなる傾向を示している。そこで、 $\overline{BB'}$ 付近の速度ポテンシャル分布について検討してみよう。

いま $q/t = s/t = 1.0$, $d+r = t+s$, $2r/t = 0.2$ の場合の等ポテンシャル線を電気モデルによって描いてみると図-8のようになり、 $\overline{BB'}$ 線付近の等ポテンシャル線がゆるやかな山形になっていることがわかる。この影響が図-7に式(17)と式(24)の算定誤差としてあらわれてくるから、さらに大きな q/t の場合には等ポテンシャル線の形状が円に近づいてゆくの、 $\overline{BB'}$ 線を等ポテンシャル線とする仮定に無理を生じ、式(17)と式(24)との算定誤差が大きくなる

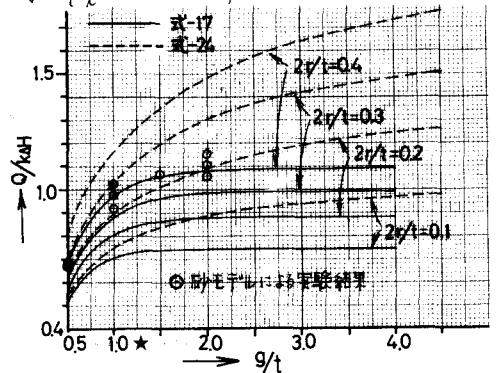


図-7 算定結果と実験結果との比較

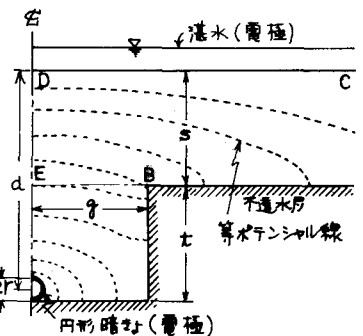


図-8 等ポテンシャル線図

のはめまらぬであろう。したがって、式(24)は非常に細長い埋込部の場合にしか使用できない。すなわち、浸透領域を分割して解析できるのは、一般に、分割部の幅が非常に狭い場合に限られるだろう。

参考文献：1) 上田・杉鹿, “有無限流入部をもつ長方形浸透領域内の暗まよ排水量について” 第23回 年次学術講演会 II-154, P.433.

2) 反田晋, “楕円函数論” 共立出版, 昭和33年. 3) 例えび 林桂一, 森口繁一, “高等函数表” 第2版 岩波書店, 1967年. 春日屋伸昌, “新編数便覧”

学振社, 昭和43年. 4) 富士岡義一, 高橋 隆, “成層土壌における暗まよ排水の基礎的研究(Ⅲ)” 農業土木学会論文集第23号, 1968年.