

京都大学防災研究所

正会員 土屋 義人

建設省近畿地建河川計画課

正会員 青山 俊樹

1. 緒言 掃流砂れきは一一般に saltation といわれる特徴的な運動をくり返して流下していくが、この場合任意の1つの砂れきの運動を注意深くみると、床面との接触を保ちながら saltation をくり返していくものが多いことがわかる。この場合、saltation の定義には種々あるが、ここでは広義に考えて sliding または rolling もこの運動の中に入るものとしておこう。このように saltation の継続運動をなす場合をここでは successive saltation とよぶことにし、その力学的過程について簡単な考察を進めたいと思う。ただし、多くの砂れきが運動する場合に対しては、直接その考察を進めるのが困難であるので、単一砂れきの運動に限定してその理論的考察を行なう。最後に、この結果を掃流砂れきの場合に、そのまま適用した結果についても述べる。

2. 砂れきの跳躍機構 砂れきの跳躍に対する運動方程式は、水平および鉛直方向のそれぞれに対してあらわされるものと仮定すれば、

$$dU/dt = (3/4)C_{01}(U-U^*)^2/(\sigma/p+1/2)d, \quad dW/dt = \mp(3/4)C_{02}W^2/(\sigma/p+1/2)d - (\sigma/p-1)g/(\sigma/p+1/2) \quad \text{---(1)}$$

ここに、 U および W : 砂れきの速度のそれぞれ水平および鉛直成分、 C_{01} および C_{02} : それらに適合する抗力係数、 d : 砂れきの大きさ、 σ/p : 砂れきの比重、 g : 重力の加速度、 t および u : 時間、 u^* : 無次元量 $\bar{W} = W/u^*$, $\bar{U} = U/u^*$, $K^2 = (4/3)\{(\sigma/p-1)gd/u^{*2}\}(1/C_{01})$, $\bar{U}_1 = (3/4)\{C_{01}/(\sigma/p+1/2)\}(u^*t/d)$, $\bar{U}_2 = (3/4)\{C_{02}/(\sigma/p+1/2)\}(u^*t/d)$ を用いれば、

$\bar{U}_1 = 0$ で $\bar{W} = \bar{W}_0$ としたときの跳躍高さ H は、 $\bar{H} = H/d$ とし、

$$\bar{H} = (2/3)\{(\sigma/p+1/2)/C_{01}\} \log\{1+(\bar{W}_0/K)^2\} \doteq (2/3)\{(\sigma/p+1/2)/C_{01}\} (\bar{W}_0/K)^2 \quad \text{---(2)}$$

砂れきが落下するときの床面直下の速度 $\bar{W}_1$ は、 $C_{01} \approx C_{02}$ のとき

$$\bar{W}_1 = -K(\bar{W}_0/K)/\{1+(\bar{W}_0/K)^2\} \doteq -\bar{W}_0 \quad \text{---(3)}$$

同様に水平方向に対して、 $\bar{U}_1 \doteq \bar{U} - (\bar{U} - \bar{U}_0)/\{1+2(\bar{U} - \bar{U}_0)\bar{W}_0/K^2\}$ ---(4)

であり、跳躍距離 L は $\bar{L} = L/d$ とし、つぎのように近似される。

$$\bar{L}_1 \doteq (4/3)\{(\sigma/p+1/2)/C_{02}\}\{2\bar{U}\bar{W}_0/K^2 - \log\{2(\bar{U} - \bar{U}_0)\bar{W}_0/K^2 + 1\}\} \quad \text{---(5)}$$

3. 砂れきの反発機構 図-2のように、砂れきの衝突による反発を考えるとすれば、反発係数を e とし、次式が成立すると仮定する。

$$-eV_1 \cos(\pi-\alpha) = V_2 \cos(\pi-\beta-\gamma), \quad V_1 \sin(\pi-\alpha) = V_2 \sin(\pi-\beta-\gamma) \quad \text{---(6)}$$

これから、 $\bar{W}_0$ と $\bar{W}_1$ および $\bar{U}_0$ と $\bar{U}_1$ の関係を求める。

$$\bar{W}_0 = \{[(1+e)(\delta_1\delta_2-1) + \sqrt{(1+e)^2(1-\delta_1\delta_2)^2 - 4e(1+\delta_1^2)(1+\delta_2^2)}]/2(1+\delta_1^2)\}\bar{W}_1$$

$$= P_0\bar{W}_1 \quad (P_0 < 0), \quad \bar{W}_0 \doteq e(\delta_1/\delta_2)\bar{W}_1 \quad \text{---(7)}$$

ここに、 $\bar{U}_1 = \delta_1\bar{W}_1$, $\bar{U}_0 = \delta_2\bar{W}_0$ および $b_1 = (1+e)\tan\gamma$, $b_2 = (1-e)\tan\gamma$ $\bar{b}_3 = (\tan^2\gamma - e)$ を用いれば、つぎの関係がえられる。

$$\bar{U}_0 = e\bar{U}_1, \quad \bar{W}_0 = e\{b_1\bar{U}_1 + b_2\bar{W}_1\}/\{b_3 + b_1(\bar{W}_1/\bar{U}_1)\} \quad \text{---(8)}$$

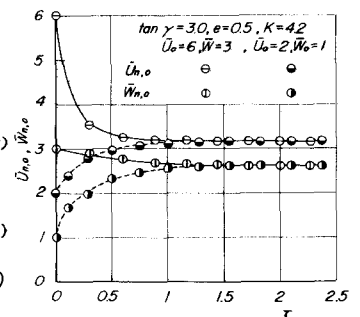


図-1 Successive saltation における速度の変化

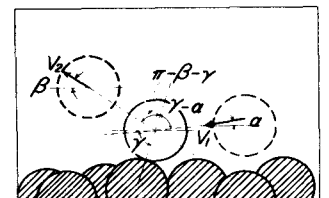


図-2 砂れきの反発機構

4. 砂れきの successive saltation の機構

図-1 は 2, および 3. で述べた関係を用いて, 図中に示した条件のもとに, 跳躍のくり返しを計算して, そのときの速度の変化を示した一例である。この結果において, おのおののまる印は saltation の回数に対応するが, これから初期条件をとらず 4~5 回の saltation によって各国の初速度が一定値になることがわかる。このような saltation を stationary saltation ということにする。いま, k 回目の saltation において, この stationary saltation に達したとすれば, つぎの関係が成立する

$$\bar{U}_{0k} = P'\bar{u}, \quad \bar{W}_{0k} = Q'\bar{u}, \quad \bar{U}_{0k+1} = \bar{U}_{0k}, \quad \bar{W}_{0k+1} = \bar{W}_{0k} \quad (9)$$

したがって, これらの関係に (3), (4) および (8) 式を代入して, $\bar{U}_{1k}, \bar{W}_{1k}$ および $\bar{U}_{0k+1}, \bar{W}_{0k+1}$ を $\bar{u}, P'\bar{u}/K, Q'\bar{u}/K, e, b_1, b_2$ および b_3 などの関数としてあらわすことができるので, これらの諸式から P', Q', e および $\tan \delta$ の関係を求めると次式がえられる。

$$P' = e\{(1-(1-P')/(1+2(1-P')Q'(\bar{u}/K)^2)\}, \quad Q' = e\{(b_1/e)P' - b_2Q'\}/\{b_3 - b_1e(Q'/P')\} \quad (10)$$

これから, 一般に $Q' \leq P'$ であることに注意して P' および Q' について解き, 若干変形すれば,

$$P' = \{(1+e) - \sqrt{(1-e)^2 + 2(1-e)\{\lambda(\bar{u}/K)^2\}}\}/2, \quad Q' = \lambda P' \quad (11)$$

したがって, これらを (9) 式に代入すれば, stationary velocity $\bar{U}_s$ および $\bar{W}_s$ は, 近似的に

$$\bar{U}_s = \{(1+e) - \sqrt{(1-e)^2 + 2(1-e)\{\lambda(\bar{u}/K)^2\}}\}\bar{u}/2, \quad \bar{W}_s = \lambda\{(1+e) - \sqrt{(1-e)^2 + 2(1-e)\{\lambda(\bar{u}/K)^2\}}\}\bar{u}/2 \quad (12)$$

この結果から, stationary saltation とする条件がえられる。

たとえば, $\bar{U}_s = \bar{W}_s = 0$ となるための条件として,

$$u^{*2}/(\sigma/p-1)gd = (2/3)(1/C_{D1})\{(1-e)/e\lambda\bar{u}^2\} \quad (13)$$

がえられるが, これは通常の限界掃流力とは当然相違する。

5. Stationary saltation における跳躍特性

ここでは, 前述したように $\bar{W}_0/K \ll 1$ として近似した場合につ

いてのみ述べるが, さらに一般の場合に対しても可能である。図-4 λ の掃流力による変化 (5) 式において簡単のために $(\bar{u}-\bar{U}_0)\bar{W}_0/K^2 \ll 1$ とし (1) 式と (2) 式に (12) 式を代入すれば, 砂れきの跳躍高さおよび跳躍の平均値 $\bar{H}_m$ および $\bar{L}_m$ は, それぞれ次式のようにあらわされる。

$$\bar{H}_m \doteq (1/6)\{(\sigma/p+1/2)/C_{D1}\}\lambda^2\{(1+e) - \sqrt{(1-e)^2 + 2(1-e)\{\lambda(\bar{u}/K)^2\}}\}^2(\bar{u}/K)^2 \quad (14)$$

$$\bar{L}_m \doteq (2/3)\{(\sigma/p+1/2)/C_{D2}\}\lambda\{(1+e) - \sqrt{(1-e)^2 + 2(1-e)\{\lambda(\bar{u}/K)^2\}}\}^2(\bar{u}/K)^2 \quad (15)$$

したがって, これから $\lambda \doteq 4(C_{D1}/C_{D2})(\bar{H}_m/\bar{L}_m) \quad (16)$

図-3 は単一砂れきが移動を開始してより, 第 4, 5 および 6 回目の跳躍が図-1 に示した結果から推定して, ほとんど stationary saltation になっていると考えて, (14) および (15) 式と実験結果とを比較したものである。実験値はかなりばらついているが, よく一致するといつてよいであろう。

図-4 は同様に実験値と (16) 式とを比較したものであるが, これから λ の値は掃流力に関係なく $\lambda = 0.4$ 程度であることがわかり, (16) 式の結果と一致する。また e の値は実験結果から 0.89 と定められた。

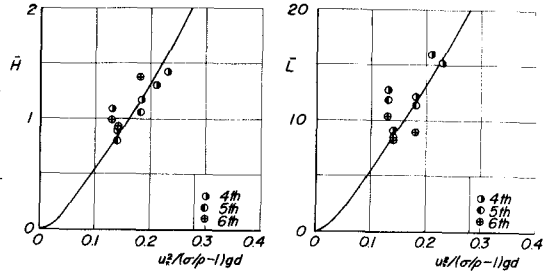
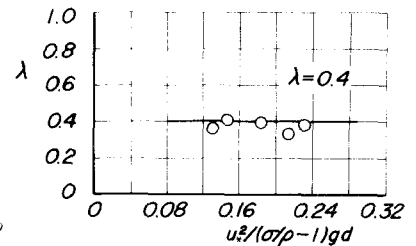


図-3 Stationary saltation における砂れきの跳躍高さおよび距離の掃流力による変化



つぎに, *stationary saltation* における跳躍高さおよび距離の分布特性について考える。前述した *stationary velocity* は一般に砂れき間の衝突や速度の変動あるいは衝突時の角度の分布などによって, あるばらつきを示す。いまこの速度の確率密度関数が次式であらわされるとする。

$$f_1(\bar{U}) = (1/\sqrt{2\pi})(1/\sigma_U) \exp\{-(\bar{U}-\bar{U}_s)^2/2\sigma_U^2\},$$

$$\sigma_U = \varepsilon \bar{U}_s \quad \text{----- (17)}$$

さらに, 一般に $\bar{W} = \lambda \bar{U}$ ----- (18)

であるとするば, (17) 式に対応して

$$f_2(\bar{W}) = (1/\sqrt{2\pi})(1/\varepsilon \bar{W}_s) \exp\{-(\bar{W}-\bar{W}_s)^2/2(\varepsilon \bar{W}_s)^2\} \quad \text{----- (19)}$$

がえられる。したがって, 跳躍高さの確率密度関数を $f_3(\bar{H})$ とすれば, 一般に

$$f_3(\bar{H}) d\bar{H} = f_2(\bar{W}) d\bar{W} \quad \text{----- (20)}$$

$$f(\bar{H}) = (1/2\sqrt{2\pi})(1/\varepsilon \sqrt{\bar{H}_m}) \exp\{-(\bar{H}-\bar{H}_m)^2/2\varepsilon^2 \bar{H}_m\} \quad \text{----- (21)}$$

同様に, 跳躍距離に対しては前述した関係から近似的に,

$$\bar{L} \doteq (8/3)\{(\sigma/p + 1/2)/C_{D_s}\} \lambda (\bar{U}/K)^2 \quad \text{----- (22)}$$

であることを考慮すれば, その密度関数 $f_4(\bar{L})$ は,

$$f(\bar{L}) = (1/2\sqrt{2\pi})(1/\varepsilon \sqrt{\bar{L}_m}) \exp\{-(\bar{L}-\bar{L}_m)^2/2\varepsilon^2 \bar{L}_m\} \quad \text{----- (23)}$$

図-5は(21)および(23)式と前述した *stationary saltation* に対する実験値とを比較したものであるが, この場合便宜上それぞれの平均値に対しては実験値を用いた。これから, これら両式であらわされる分布特性は, *stationary saltation* に対してよく一致することがわかる。ただし, この場合 ε の値は実験値に合うように $\varepsilon = 0.2$ と定められた。しかし, (21) および (23) 式から求められる $\sigma_H/\bar{H}_m$ および $\sigma_L/\bar{L}_m$ の値と実験値のものを比較すると, 図-6 のようになつて両者は大体一致して, それは掃流力に関係ないことがわかる。

6. 掃流砂れきの *saltation* への適用 掃流砂れきの運動には, 静止状態を含めて7つの基本的状態が存在するものと考えることができ, こ

こでは砂れきが床面との反発現象をくり返して 図-7 掃流砂れきの *saltation* の高さおよび距離く場合のみを対象として, 前述した単一砂れきの運動とくに *successive saltation* の理論をそのまま適用して現象の説明を試みたい。まず, 図-7は砂れきの跳躍高さおよび距離の掃流力による変化を示したものであり, 図中直線Aは *first saltation* に対する土屋らの理論によるものであり, これは静止状態から運動を開始した砂れきが床面砂れきと衝突した第1回目の跳躍であり, また曲線Bは(14)および(15)式であらわされる *stationary saltation* の関係を示す。この場合, λ の値は図-8に示すように, 単一砂れきの場合と同様に掃流砂れきの場合でも 0.4 程度の値であることがわかった。この値をそのまま用いることにし, さらに反発に関する実験結果から求めらる $e = 0.55$ を用いた。

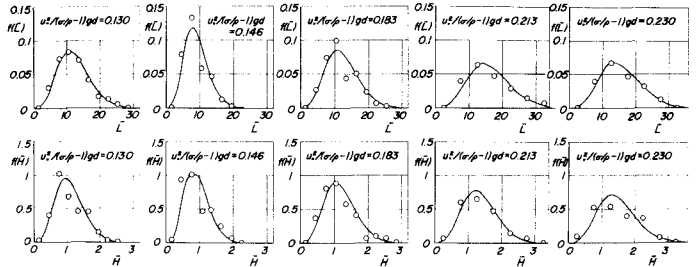


図-5 跳躍高さおよび距離の分布特性

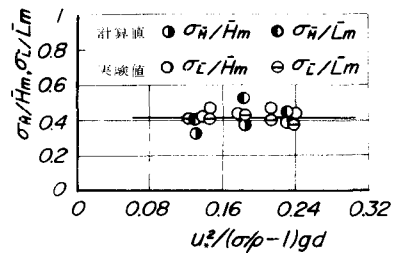
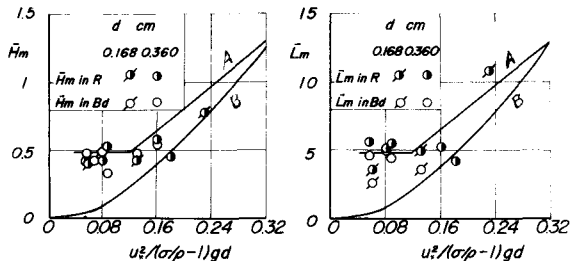
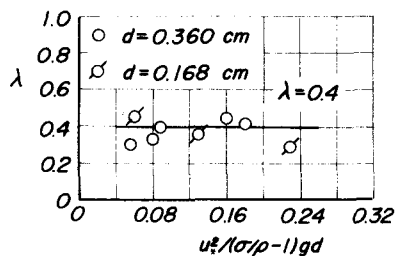


図-6 単一砂れきの場合の ε の値

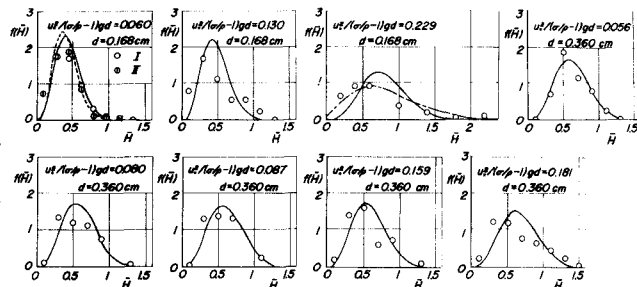


ここに示した実験値は、静止からの跳躍と反発による再跳躍の場合に限って、それらの平均値を示したが、これから下記のことがわかる。すなわち、実験値のほとんどはこれらAおよびBの理論曲線の中間に図示され、とくに掃流力の小さい場合には *first saltation* の曲線に近く、大きい場合にはいずれの理論にも近似されるが、さらに掃流力が大きくなると場合の結果がないので明



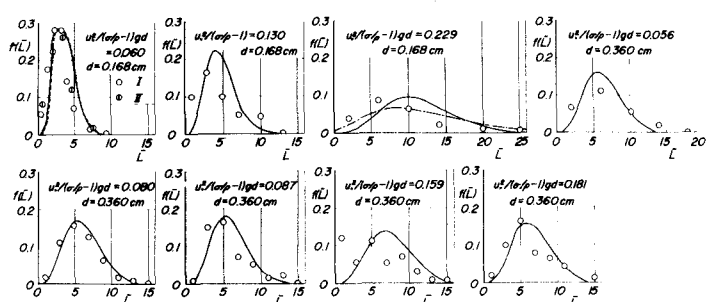
確なことはわからない。いいかえると、*first saltation* に近い運動をしている砂れきと *stationary saltation* に近いものの配分が存在し、これが掃流砂れきの *saltation* の本質であるというべきであろう。

これまでの実験結果から判断すると、後者の運動であらわされるものは約 40% 程度であろう。つぎに、図-9 および 10 はそれぞれ掃流砂れきの跳躍高さの分布特性を示したものである。ただし、理論曲線においては、 $\epsilon = 0.2$ とし、平均値に対しては実験値を用いたのは図-5 とおなじである。



また、 $u^*/(v^* - 1)gd = 0.060$ の場合、I は跳躍に移行する運動形式をとわずすべとあり、また II は反発によるもののみをとるあげに結果である。

図-5 に示したものと比較して、その適合性はあまりよくないが、これは運動形式が反発りみに限定され



いと ϵ の値によるものと考えられ 図-10 掃流砂れきの跳躍距離の分布特性

る。たとえば、図-11 は反発における砂れきのとび出し速度の分布を示したものであるが、これから $\epsilon = 0.3$ 程度が推定されるので、反発現象がかなり多いと考えられる $u^*/(v^* - 1)gd = 0.229$ の場合に、この値を用いて理論曲線を示しておいた。さらに、これらの考察から $\lambda = 0.41$ に対して $\epsilon = 0.49$ および 0.55 のそれぞれに対応して $\tan \delta \approx 26$ および 6 がえられたが、これから固定床よりも移動床の方が床面の平均的な凹凸が大きいことが結論される。

7. 結 語 以上、掃流砂れきの運動に関して、*successive saltation* を定義し、主としてそのうちの *stationary saltation* について簡単に理論を示したが、今後さらに任意の状態における *successive saltation* の機構を計算するとともに、これらを用いて *saltation layer* の流速分布や流砂量式に関する理論を試みて流砂力学の確立に努めたい。

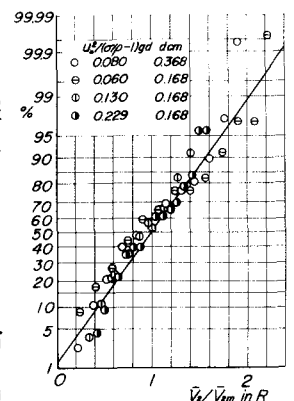


図-11 反発時の速度ベクトルの分布特性

本研究を行なうにあたりご指導いただいた矢野教授および協力願った道上助手に謝意を表明する。