II−62　　運動量方程式に基づく波動による層流境界層の発達について

京都大学防災研究所　正会員　土屋　義人
〃　　　　　〃　　○山口　正隆

1．緒　言　波動に基づく層流境界層の発達およびそれに伴なう海底摩擦による波高の減衰に関しては著者の1人の土屋らの研究，Eaglesonの研究およびGrosch-Lukasikの研究など近年数多くの研究が行なわれ，その挙動がしだいに明らかにされてきた。これらの研究の基礎方程式はPrandtlにより求められた境界層方程式であり，一般に境界条件は数学的には境界層厚が無限大のところで与えられ，境界層厚が明確に定義できず，また波動のような周期運動に対して位相と境界層厚の関係が議論できない。そこで，本論文においては，こういった点を明らかにするため，前述の研究結果を参照して，境界条件を満足するように境界層内の流速uを適当に仮定して境界層に対する運動量方程式の解を求め，波動運動による層流境界層の発達について若干の検討を加えた。

2．基礎方程式　一般に，非定常運動に対する境界層の運動量方程式は水平座標をx，鉛直座標をzおよび時間をtとすれば，つぎのようにあたえられる。

$$\partial\vartheta/\partial x+(1/U)(2\vartheta+\delta^*)(\partial U/\partial x)+(1/U^2)\{\partial(U\delta^*)/\partial t\}=\tau_0/\rho U^2 \qquad (1)$$

ここに，U：境界層外縁の主流の速度，ρ：流体の密度，であり，またτ_0は境界面におけるせん断応力で，層流の場合には，Newtonの法則に従がう。さらに，δ^*およびϑはそれぞれ排除厚，運動量厚とよばれるもので，δを境界層厚とすれば，次式により定義されている。

$$U\delta^*=\int_0^\delta(U-u)dz \qquad (2) \qquad\qquad U^2\vartheta=\int_0^\delta(U-u)u\,dz \qquad (3)$$

3．微小振幅波による層流境界層の発達特性　微小振幅波による層流境界層の解を参照して，uは境界条件（$z=\delta$で　$u=U$，$z=0$で$u=0$）を満足するように考慮して，次式のように仮定する。

$$\bar{u}=u/u_0=\cos(kx-\sigma t)-\{1-(z/\delta)\}\cos\{(kx-\sigma t)+(z/\delta)\} \qquad (4)$$

また，微小振幅波によれば，底面での流速Uは次式であたえられる。　$\bar{U}=U/u_0=\cos(kx-\sigma t)$　(5)

つぎに，無次元量$\xi=kx$，$\tau=kct$，$\eta=z/\delta$，$\xi-\tau=\zeta$　および$\bar{\delta}=k\delta$を導入すると，(1)，(2)および(3)式は以下のようにかきかえられる。ここに，$k=2\pi/L$，L：波長，およびc：波速，である。

$$d\bar{\vartheta}/d\zeta+(1/\bar{U})(2\bar{\vartheta}+\bar{\delta}^*)(d\bar{U}/d\xi)-(c/u_0)(1/\bar{U}^2)\{d(\bar{U}\bar{\delta}^*)/d\xi\}=(\nu/\delta u_0)(\partial\bar{u}/\partial\eta)_0/\bar{U}^2 \qquad (6)$$

$$\bar{\delta}^*=k\delta^*=[\{1-\cos(1)\}-\tan\xi\{1-\sin(1)\}]\bar{\delta}=F_1\bar{\delta} \qquad (7)$$

$$\bar{\vartheta}=k\vartheta=[\{2-3\cos(2)\}\sec^2\xi/24+\tan\xi\{\sin(2)+4\sin(1)-3\}/4+\{\cos(2)-4\cos(1)+2\}/4]k\delta=F_2\bar{\delta} \quad (8)$$

さらに，(7)および(8)式を(6)式に代入し，若干変形すれば，次式のようにあらわされる。

$$\begin{aligned}d\bar{\delta}^2/d\xi=2[\bar{\delta}^2\{(c/u_0)(1/\bar{U})(dF_1/d\xi)-(1/\bar{U})\{2F_2+F_1-(c/u_0)(F_1/\bar{U})\}(d\bar{U}/d\xi)-dF_2/d\xi\}\\+(\partial\bar{u}/\partial\eta)_0(\nu k/u_0)(1/\bar{U}^2)]/\{F_2-(c/u_0)(1/\bar{U})F_1\}\end{aligned} \qquad (9)$$

(9)式において$\bar{\delta}^2=p$，$\varepsilon=c/u_0$とすれば，　つぎの線形1階常微分方程式がえられる。すなわち，

$dp/d\xi=\{2(C_1p+C_2)\}/C_3$，$C_1=-\varepsilon\sec\xi\{1-\sin(1)\}+\sec^2\xi\{\cos(2)+8\sin(1)-7\}/4-\{\cos(2)+6\sin(1)-5\}/2+\tan\xi\{\sin(2)-6\cos(1)+4\}/2-\varepsilon\sec\xi\tan\xi\{1-\cos(1)\}$，$C_2=(\nu k/u_0)\sec\zeta(1+\tan\zeta)$，$C_3=\{2-3\sin(2)\}\sec^2\zeta/24-\varepsilon\{1-\cos(1)\}\sec\zeta+\tan\zeta\{\cos(2)+4\sin(1)$

$-3/4+\varepsilon\{1-\sin(1)\}\sec\zeta\tan\zeta+\{\sin(2)-4\cos(1)+2\}/4$ (10)

以上の結果は微小振幅波に基づくものであるが，層流境界層内の流速を適当に仮定するならば，Stokes波の場合にも容易に拡張され，この点がこの手法の大きな特徴といえよう。

4．特異点の吟味 (10)式によってあたえられた方程式は線形1階常微分方程式であるが，分母および分子が同時に0になる場合に特異点をもつことになり，特異点の近傍での解の挙動を調べることが必要になる。図－1は u_0/C をパラメーターとして，特異点の縦座標 p_0 と $Re_T=u_0^2T/\nu$（T：周期，ν：動粘性係数）との関係を示したものである。この場合，ε と Re_T の各組合せにより，特異点 (ζ_0, p_0) はそれぞれ2組えられるが，特異点の横座標はいずれも ε の値にかかわらず，ほとんど一定であるので，省略した。つぎに，特異点の近傍の解の挙動を調べるため，特異点に原点を移す座標変換を行ない，原点のまわりで新しい座標系 (ζ', p') について展開を行ない，2次以上の項を省略すると，次式がえられる。

$$dp'/d\zeta'=(C\zeta'+Dp')/A\zeta',\quad \zeta'=\zeta-\zeta_0,\quad p'=p-p_0 \tag{11}$$

ここに，$A=-\varepsilon\{1-\cos(1)\}\tan\zeta_0\sec\zeta_0-\{2-3\sin(2)\}\tan\zeta_0\sec^2\zeta_0/12+\{\cos(2)+4\sin(1)-3\}+\tan\zeta_0\{\cos(2)+4\sin(1)-3\}/4$ $+\varepsilon\{1-\sin(1)\}\sec\zeta_0+2\varepsilon\tan^2\zeta_0\sec\zeta_0\{1-\sin(1)\}$，$B=2p_0[-\varepsilon\sec\zeta_0\tan\zeta_0\{1-\sin(1)\}+\sec^2\zeta_0\tan\zeta_0\{\cos(2)+8\sin(1)$ $-7\}/2+\{\sin(2)-6\cos(1)+4\}\{1+\tan^2\zeta_0\}/2-\varepsilon\sec\zeta_0(1+2\tan^2\zeta_0)\{1-\cos(1)\}]+2(k/u_0)\sec\zeta_0\{1+\tan\zeta_0+2\tan^2\zeta_0\}$，

$D=2[-\varepsilon\sec\zeta_0\{1-\sin(1)\}+\sec^2\zeta_0\{\cos(2)+8\sin(1)-7\}/4-\{\cos(2)+6\sin(1)-5\}/2+\{\sin(2)-6\cos(1)+4\}\tan\zeta_0/2-$ $\varepsilon\sec\zeta_0\tan\zeta_0\{1-\cos(1)\}]$ (12)

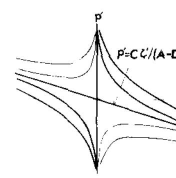
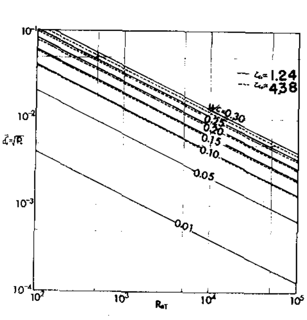
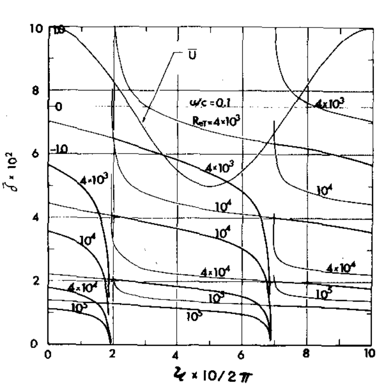


図-2 鞍点での積分曲線

(12)式において ε および Re_T の値をかえて計算すると，図－1に示したおのおのの特異点について，一般に $AD<0$ となり，この原点を通る積分曲線が $\zeta'=0$ および $p'=C\zeta'/(A-D)$ であらわされる鞍点であって，その概要は図－2に示すようになる。したがって，これらの特異点を境界条件として Runge-Kutta 法によって(10)式を積分することができ，その結果を図－3に示す。この結果からまず特異点の位置がいわゆる *shear waves* の場合の境界層内での流速方向の変化点と一致することがわかり，また底面流速 $\overline{U}$ との関係から境界層の挙動がきわめて複雑であるが，おそらく図－3に示した太い線のようになるものと考えられ，その結果，特異点の近傍を除いて，波動による境界層の厚さは位相に対して急激には変わらないことがわかる。さらに，これらの結果によると，境界層内における流速分布が *shear waves* の場合とどの程度に対応するか，あるいは *mass transport velocity* の境界層内での分布も検討されるが，その結果は講演時に説明したい。一方，前述したように Stokes波の場合に拡張できると考えられるが，とくに流速分布について検討すべきであろう。



図－1 鞍点での境界層の厚さ



図－3 境界層の厚さの積分曲線