

九州大学工学部 正会員 栗谷陽一

九州大学工学部 正会員 古本勝弘

九州大学大学院 学生員 ○島田 晋

§1. まえがき 河川における拡散現象に一次元の拡散方程式を適用する場合には、流れ方向の拡散係数として、乱流拡散係数よりも大きな、みかけの拡散係数を用いることが必要となる。この報告は、潮汐の作用による周期的流れを受ける河川感潮部で生じる乱流拡散現象に注目し、そのみかけの拡散係数を算定しようとするものである。前回(昭和43年度年次学術講演会、昭和43年度西部支那研究発表会)までは、円管内の周期的流れによる乱流拡散について報告して来たが、今回はそれを開水路にまで拡張し、水深方向の拡散を考えたものと、川幅方向の拡散を考えたものについて、みかけの拡散係数を求める近似式を導いている。計算方法としては、G.I. Taylorの理論¹⁾を基礎に、J.W. Elderの理論²⁾(水深方向の拡散を考慮)の拡張を行ない、次にH.B. Fischerの理論³⁾(川幅方向の拡散を考慮)を応用している。

§2. 水深方向の拡散を考えたときの拡散係数 流れ方向に x 軸、水深方向に水表面より z 軸をととり、水深を h とする。流れの横断方向(y 方向)については一様な場合を考え、空間的には x と z の二次元の現象として取扱う。任意点の流速 $u(z) = u(y)$ も定常流の場合の流速分布関数 $f(z)$ を用いて次のように表わす。

$$u(z) = \frac{U}{\varphi} (\varphi - f(z)) \quad (1)$$

ここに、 $U = U_0 \cos \omega t$: 水深 h 間の平均流速、 $\varphi = \frac{|U|}{u_*}$: 流速係数、 u_* : マサツ速度
運動量輸送と質量輸送の Similarity を仮定すれば、乱流拡散係数は次のようになる。

$$\epsilon = -\tau / \rho \frac{\partial u}{\partial z} = -m / \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \quad \text{より} \quad \epsilon = \frac{|U|}{\varphi} \frac{5h}{45} \frac{df}{dz} \quad (2)$$

ただし、 τ : 流体のせん断応力、 ρ : 流体の密度、 m : 水深方向の物質輸送量、 C : 濃度
拡散方程式は、流れ方向の拡散を水深方向の拡散に比べて無視すれば、

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon \frac{\partial C}{\partial z}) \quad (3)$$

ここで、 $x_1 = x - \int_0^t U dt = x - \frac{U_0}{\omega} \sin \omega t$ とおき、 (x, z, t) から (x_1, z, t) へ座標変換すると、

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{U_0}{\varphi} \frac{\partial C}{\partial z_1} f \cos \omega t = \frac{U_0}{\varphi h} \left| \cos \omega t \right| \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{5}{45} \frac{df}{dz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (4)$$

Taylor や Elder の方法に習って、 $\frac{\partial C}{\partial z_1} = \alpha = \text{const.}$ と考え、濃度分布を近似的に次のように仮定する。

$$C = C_0 + \alpha x_1 + \alpha h (\psi(z) + \lambda) (\tau \cos \omega t + \sigma \sin \omega t) \quad (5)$$

$$\text{ただし、} \quad \psi(z) = \psi_0 - \int_0^z \frac{5}{45} \psi^{-1} \int_0^5 f \, dz \, dz, \quad \int_0^5 \psi \, dz = 0 \quad (6)$$

λ, τ, σ : 定数

(4) を水深方向で積分し、(5), (6) を考慮すれば、

$$\int_0^5 \frac{\partial C}{\partial z} \, dz = 0 \quad \text{より} \quad \lambda = 0 \quad (7)$$

(4) に f をかけて水深方向で積分すると、

$$\int_0^5 f \frac{\partial C}{\partial z} \, dz - \frac{U_0}{\varphi} \alpha \cos \omega t \int_0^5 f^2 \, dz = \frac{U_0}{\varphi h} \left| \cos \omega t \right| \int_0^5 f \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{5}{45} \frac{df}{dz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \, dz \quad (8)$$

(8)に(5),(6)を代入し、 $\frac{q\omega \int_0^1 \psi dy}{4\omega \int_0^1 \psi dy} = \Omega$ とおき、 $|\cos \omega t| \cos \omega t$ と $|\cos \omega t| \sin \omega t$ を Fourier 級数に展開して係数と比較すると、

$$\Omega \sigma - 1 = -\frac{8}{3\pi} \sigma, \quad -\Omega \sigma = -\frac{4}{3\pi} \sigma \quad \text{より} \quad \sigma = \frac{12\pi}{32 + 9\pi^2 \Omega^2}, \quad \Omega = \frac{9\pi^2 \Omega}{32 + 9\pi^2 \Omega^2} \quad (9)$$

(5)に(7),(9)を代入して、

$$C = C_0 + \alpha \left(x - \frac{U_0}{\omega} \sin \omega t \right) + \frac{12\pi}{32 + 9\pi^2 \Omega^2} \alpha R \psi \left(\cos \omega t + \frac{3\pi}{4} \Omega \sin \omega t \right) \quad (10)$$

流れ方向単位断面積当りの物質輸送量の一周期の平均 $\bar{J}$ は、

$$\bar{J} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^1 (u-U) C dz \right\} dt = -\frac{U_0}{4} \frac{6\pi}{32 + 9\pi^2 \Omega^2} \alpha R \int_0^1 \psi dy \quad (11)$$

このことから、流れ方向のみかけの拡散係数 K_L は、 $\bar{J} = -K_L \frac{\partial C}{\partial x}$ より、

$$K_L = \frac{2}{\pi} \frac{U_0 R}{\phi} \frac{3\pi^2}{32 + 9\pi^2 \Omega^2} \int_0^1 \psi dy \quad (12)$$

一方、Elderの理論より、定常流の場合に相当するみかけの拡散係数 K_{LS} は、

$$K_{LS} = \frac{U_0 R}{\phi} \int_0^1 \psi dy = \frac{2}{\pi} \frac{U_0 R}{\phi} \int_0^1 \psi dy \quad (13)$$

とならなければならないので、(12)において、 $\omega = 0$ ($\Omega = 0$) とおいたとき、(13)に一致するように、 K_L を改めた次のようにおく。

$$K_L = \frac{2}{\pi} \frac{U_0 R}{\phi} (1 + \frac{9\pi^2}{32} \Omega^2)^{-1} \int_0^1 \psi dy = K_{LS} (1 + \frac{9\pi^2}{32} \Omega^2)^{-1} \quad (14)$$

また、流れ方向の乱流拡散係数か水源方向のそれに等しいとすると、流れ方向の拡散係数 K_* は、

$$K_* = \int_0^1 \epsilon dy = \frac{2}{\pi} \frac{U_0 R}{\phi} \int_0^1 \frac{5}{4\epsilon} dy \quad (15)$$

ここで流速分布として、対数分布を用いると、

$$\bar{y} = -\frac{1}{\kappa} (1 + \log(1-\zeta)) \quad \kappa: \text{Kármán 数} = 0.410 \quad (16)$$

$$\psi = \frac{1}{\kappa^2} (1 - \frac{\pi^2}{8} - \int_0^1 \zeta^2 \log(1-\zeta) d\zeta) = \frac{1}{\kappa^2} (1 - \frac{\pi^2}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2}) \quad (17)$$

$$\int_0^1 \psi dy = 5.86, \quad \int_0^1 \zeta^2 dy = 5.95, \quad \int_0^1 \frac{5}{4\epsilon} dy = \frac{\kappa}{\epsilon} = 0.068 \quad (18)$$

またストローク(流体粒子が半周期の間に動く平均距離) $S' = \frac{2U_0}{\omega}$ を用いて、 Ω を書きかえると、 $\Omega = 1.97 \frac{U_0}{S}$ となる。 $K = K_L + K_*$ とおき、(14),(15)にそれぞれ(16)~(18)を代入すると、

$$K = \frac{2}{\pi} \frac{U_0 R}{\phi} \left\{ 5.83 (1 + 0.8 (\frac{U_0}{S})^2)^{-1} + 0.068 \right\} \quad (19)$$

§3. 川幅方向の拡散を考えたときの拡散係数 川幅方向の乱流拡散係数を ϵ とし、流れ方向(x 方向)の拡散を川幅方向(y 方向)の拡散に比べて無視すれば、拡散方程式は次のようになる。

$$R \frac{\partial C_1}{\partial t} + g \frac{\partial C_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (R \epsilon \frac{\partial C_1}{\partial y}) \quad (20)$$

ただし、 $C_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} C dz$, $g = \int_0^{\pi} u dz$

ここで $x_1 = x - \frac{1}{g} \int_0^t \langle g \rangle dt$, $\langle g \rangle = \frac{1}{W} \int_0^W g' dy$, W : 川幅, $g' = g - \langle g \rangle$ とおくと(21)は、

$$R \frac{\partial C_1}{\partial t} + g' \frac{\partial C_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial y} (R \epsilon \frac{\partial C_1}{\partial y}) \quad (21)$$

定常流についての濃度分布及びみかけの拡散係数は、Fischerの理論²⁾によれば、次のようである。

$$C_1 = C_0 + \alpha x_1 + \alpha Y(g) \quad \alpha = \frac{\partial C_1}{\partial x_1} = \frac{\partial C}{\partial x} = \text{const.} \quad (22)$$

とすれば、Taylor流の方法で、 y 方向の濃度分布 $Y(g)$ は次のようになる。

$$Y = Y_0 + \int_0^g \frac{1}{g' e} \int_0^{g'} g'' dy' dy, \quad \frac{1}{A} \int_0^W Y R dy = 0 \quad (23)$$

また、断面積 A を通して流れ方向に輸送される物質流量 J は、

$$J = \int_0^W g' C_1 dy = \alpha \int_0^W g' \int_0^g \frac{1}{g' e} \int_0^{g'} g'' dy' dy dy \quad (24)$$

したがって、みかけの拡散係数 K_{LS} は、 $J = -A K_{LS} \frac{\partial C}{\partial x}$, $\frac{\partial C}{\partial x} = \alpha$ より、

$$K_{LS} = -\frac{1}{A} \int_0^W g' \int_0^z \frac{1}{\eta} e \int_0^y g' dy dz dx \quad (25)$$

また、Fischer は川幅方向の乱流拡散係数 E とし、Elder の文献と実験から次の値を用いている。

$$E = 0.23 R U_* \quad (26)$$

次に、周期的流れの場合の濃度分布とみかけの拡散係数を求める。一周期の間の最大値に添字 0 をつけて表わし、 $g' = g'_0 \cos \omega t$, $e = e_0 |\cos \omega t|$, (21) に代入すると、

$$g \frac{\partial g_1}{\partial x} + g'_0 \frac{\partial g_1}{\partial x} \cos \omega t = \frac{\partial}{\partial y} (g'_0 e_0 \frac{\partial g_1}{\partial y}) |\cos \omega t| \quad (27)$$

$$\text{ここから} \quad C_1 = C_0 + \alpha x_1 + \alpha (Y(y) + \lambda) (\tau \cos \omega t + \sigma \sin \omega t) \quad (28)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{\partial C_1}{\partial x} = \alpha = \text{const.} \quad \lambda, \tau, \sigma: \text{定数}$$

と置く。(27) を川幅方向について積分すると、

$$\int_0^W g \frac{\partial g_1}{\partial x} dx = 0 \quad \text{よって} \quad \lambda = 0 \quad (29)$$

また、(27) に、 g'_0 をかけ、川幅方向について積分すれば、

$$\int_0^W g'_0 g \frac{\partial g_1}{\partial x} dx + \alpha \cos \omega t \int_0^W (g'_0)^2 dx = |\cos \omega t| \int_0^W g'_0 \frac{\partial}{\partial y} (g'_0 e_0 \frac{\partial g_1}{\partial y}) dy \quad (30)$$

(30) に (28), (29) を代入し、 $\Delta C = \frac{\omega \int_0^W g'_0 Y dy}{\int_0^W (g'_0)^2 dx}$ とい整理すると、

$$(\Delta C \sigma + 1) \cos \omega t - \Delta C \tau \sin \omega t = |\cos \omega t| (\tau \cos \omega t + \sigma \sin \omega t) \quad (31)$$

$|\cos \omega t| \cos \omega t$ と、 $|\cos \omega t| \sin \omega t$ を Fourier 級数に展開し、係数を比較すると

$$\Delta C \sigma + 1 = \frac{8}{3\pi} \tau, \quad -\Delta C \tau = \frac{4}{3\pi} \sigma \quad \text{より} \quad \tau = \frac{12\pi}{32 + 9\pi^2 \Delta C^2}, \quad \sigma = \frac{9\pi^2 \Delta C}{32 + 9\pi^2 \Delta C^2} \quad (32)$$

(32) に (29), (32) を代入すれば、濃度分布 C_1 が次のように得られる。

$$C_1 = C_0 + \alpha x_1 + \alpha Y(y) \frac{12\pi}{32 + 9\pi^2 \Delta C^2} (\cos \omega t - \frac{3\pi}{4} \Delta C \sin \omega t) \quad (33)$$

流れ方向の物質輸送量 $\bar{Q}$ の一周期の平均 $\bar{Q}$ は、

$$\bar{Q} = \alpha \frac{6\pi}{32 + 9\pi^2 \Delta C^2} \int_0^W g'_0 Y(y) dy \quad (34)$$

したがって、みかけの拡散係数 K_L は、

$$K_L = -\frac{1}{A} \frac{3\pi^2}{32 + 9\pi^2 \Delta C^2} \int_0^W g'_0 Y(y) dy \quad (35)$$

一方、定常流の場合に相当する みかけの拡散係数 K_{LS} は、

$$K_{LS} = -\frac{1}{A} \int_0^W \frac{1}{2} g'_0 Y(y) dy \quad (36)$$

で与えられるので、(35) で $\omega = 0$ ($\Delta C = 0$) といいたとき (36) に一致するよう (35) を書きかえると

$$K_L = -\frac{1}{A} \frac{3\pi^2}{32 + 9\pi^2 \Delta C^2} \int_0^W \frac{1}{2} g'_0 Y(y) dy = K_{LS} (1 + \frac{9\pi^2}{32} \Delta C^2)^{-1} \quad (37)$$

ここから、流速公式として Manning 式を用い、最大水深 H を用いて水深を無次元化し、川幅の半分 B を用いて y を無次元化すれば、みかけの拡散係数は、次のようになる。

$$K_L = K_{LS} \left\{ 1 + \mu \left(\frac{QB^2}{HS} \right)^2 \right\}^{-1}, \quad \mu = \frac{9\pi^2}{32} \left\{ \frac{2 \int_0^2 \rho(\rho^{\frac{2}{3}} - \langle \rho^{\frac{2}{3}} \rangle) \int_0^2 \rho^{\frac{2}{3}} \int_0^2 (\rho^{\frac{2}{3}} - \langle \rho^{\frac{2}{3}} \rangle) dy_1 dy_2}{0.23 \int_0^2 (\rho^{\frac{2}{3}} - \langle \rho^{\frac{2}{3}} \rangle)^2 dy} \right\}^2 \quad (38)$$

ただし、 K_{LS} は、定常流に相当する拡散係数であり、次のようである。

$$K_{LS} = \frac{2U_0}{\pi} \frac{B^2}{H} \delta, \quad \delta = \frac{1}{0.23 \langle \rho \rangle} \int_0^2 (\rho^{\frac{2}{3}} - \langle \rho^{\frac{2}{3}} \rangle) \int_0^2 \rho^{\frac{2}{3}} \int_0^2 (\rho^{\frac{2}{3}} - \langle \rho^{\frac{2}{3}} \rangle) dy_1 dy_2 \quad (39)$$

$$\text{ここに} \quad S = \frac{2U_0}{\omega}, \quad U_0 = \frac{1}{\pi} H^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}}, \quad Q = \frac{U_0}{\sqrt{gHI}}, \quad \rho = \frac{y}{H}, \quad \eta = \frac{x}{B}, \quad \langle \rho \rangle = \int_0^2 \rho dy$$

また、 δ, μ は河川断面形状によって定められるパラメータであり、例えば、三角形断面については $\delta = 1.64$, $\mu = 3.21$ 、放物形断面については $\delta = 0.474$, $\mu = 4.47$ となる。この程度の断面変化では、 μ の値はそれほど変化しないことが分る。

§4. 理論の検討と考察 水深方向の拡散を考慮した拡散係数と川幅方向の拡散を考慮したものとは比較してみると、定常流の拡散係数としては、(13)と(39)において $\frac{K_L}{K_{LS}}$ と $\frac{HS}{\phi B^2}$ が対応しており、普通の河川特に河口部を考えると、後者の方がはるかに大きい拡散係数を与える。次に周期的流れの影響を比較すると、(19)と(38)において、 $\frac{S}{\phi R}$ と $\frac{HS}{\phi B^2}$ とが対応している。 $S=10\text{km}$ 、 $\phi=15$ 、 $H=5\text{m}$ 、 $B=200\text{m}$ とすれば $\frac{S}{\phi R}=10^3$ 、 $\frac{HS}{\phi B^2}=0.08$ となり、前者の考えでは拡散係数は定常流に相当するものとはほとんど等しく、後者の方では定常流に相当するものの 10^3 程度となる。以上のことから、前回まで報告してきたような、周期的流れのストローフの影響が、川幅方向の拡散を考える際には著しく大きいと考えられる。では、この考えを筑後川における塩分侵入の数値計算に適用してみよう。断面として 64km 地点干潮時のもの(図-2、参照)を用いれば、 $H=5\text{m}$ 、 $B=200\text{m}$ 、 $\phi=15$ 、 $\frac{S}{\phi R}=0.05\text{m}^2/\text{sec}$ から $K_{LS}=10^8 \sim 10^5\text{m}^2/\text{sec}$ 、 $K_L=10 \sim 10^2\text{m}^2/\text{sec}$ 程度の値が理論より推定される。一方、実際の塩分侵入計算例においては、64km 地点のみかけの拡散係数として、約 $17\text{m}^2/\text{sec}$ とすれば実測結果が最もよく説明されることが示されている⁴⁾。したがって両者はオーダー的には一致している。このことから、実際河川についても、流れ方向のみかけの拡散係数に、流れが周期的であることの影響が著しく表われているものと考えられる。しかし、流れが周期的であることの影響を表わす K_L/K_{LS} の近似式は、 K_L/K_{LS} の小さい範囲ではあまり近似度がよくない⁴⁾。今後検討すべきであろう。

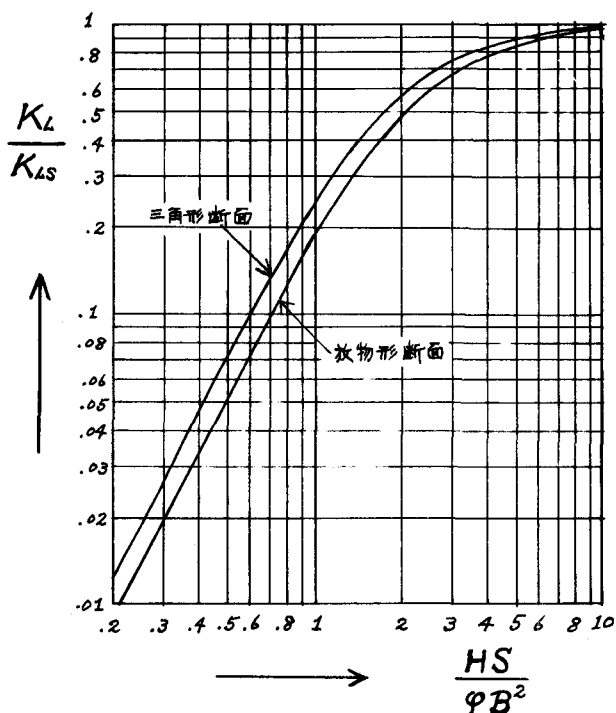


図-1. ストローフと拡散係数の関係

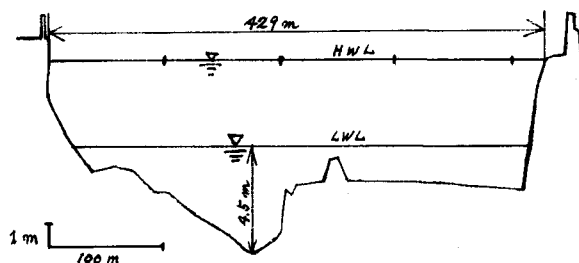


図-2. 筑後川 64km 地点の断面形状

- 参考文献 1) Taylor, G.I. 1954. Proc. Roy. Soc. A. Vol. 223, p.446~468.
 2) Elder, J.W. 1959. J. Fluid Mech. 5. p.544~560
 3) Fischer, H.B. 1967. 12th. Congress of the I.A.H.R. D2. p.11~19.
 "Analytic Prediction of Longitudinal Dispersion Coefficients in Natural Streams"
 4) 橋, 栗谷, 古本, 昭和43年度土木学会西部支部研究発表会論文集 III-9.