II−47　　二次元標準形越流頂を越える流れ

東北大学工学部　正員　坂本龍雄

1. はしがき

ダムを越える二次元流れは 越流頂面に沿う同心円の流れとして近似計算されているが 越流頂の頂点付近の曲率が大きいところでは近似度がよくない。同心円流れの計算では 主流に垂直方向の流れは極めて小さいものと仮定しているが 頂点付近ではこの流速を無視することができない。次にのべる計算方法は 主流に垂直方向の流れを考慮するものである。

2. 標準形越流頂を表わす近似式

標準形越流頂は 頂点に原点をとり下流向水平にx軸 下向きにy軸をとれば H_d を設計水頭とするとき $y/H_d = 0.5(x/H_d)^{1.85}$ で表わされる曲線を下流面とし、$x/H_d = -0.175$ までを半径 $0.5H_d$ の円 それより上流 $x/H_d = -0.282$ までを半径 $0.2H_d$ の円で表わすものである。しかしこの下流面曲線は $x = 0$ において曲率半径が零となるから 上流側の曲線すなわち半径 $0.5H_d$ の曲線は連続にならない。しかしこの曲線に沿う水の流線は当然 連続な曲線を画く筈であるから この越流頂曲線の不連続を除くため $x/H_d = -0.175$ から $x/H_d = 0.5$ までの間を 一本の曲線で近似する

$x/H_d = X$ $y/H_d = Y$ とすれば 標準形越流頂の下流側を表わす曲線は $Y = 0.5X^{1.85}$ であるから $X = 0.5$ において $Y = 0.138697$ $dY/dX = 0.513175$ $d^2Y/dX^2 = 0.872398$ $d^3Y/dX^3 = -0.261719$ である。

いま 越流頂形状の近似式を $f(X)$ で表わし

$$f(X) = f(0) + X\left(\frac{df}{dX}\right)_{X=0} + \frac{X^2}{2!}\left(\frac{d^2f}{dX^2}\right)_{X=0} + \frac{X^3}{3!}\left(\frac{d^3f}{dX^3}\right)_{X=0} + \frac{X^4}{4!}\left(\frac{d^4f}{dX^4}\right)_{X=0} + \frac{X^5}{5!}\left(\frac{d^5f}{dX^5}\right)_{X=0} + \frac{X^6}{6!}\left(\frac{d^6f}{dX^6}\right)_{X=0} \quad (1)$$

とし $X = 0$ において $f(X) = 0$ $df/dX = 0$，$X = 0.5$ において $f(X) = 0.138697$ $df/dX = 0.513175$ $d^2f/dX^2 = 0.872398$ $d^3f/dX^3 = -0.261719$，$X = -0.175$ において $f(X) = 0.031625$ となるように $f(X)$ を定めれば $(d^2f/dX^2)_{X=0} = 1.556985$ $(d^3f/dX^3)_{X=0} = -6.184286$ $(d^4f/dX^4)_{X=0} = 48.12696$ $(d^5f/dX^5)_{X=0} = -257.41424$ $(d^6f/dX^6)_{X=0} = 673.722418$ となる。

(1)式の表わす曲線は $X = -0.175$ において標準形越流頂にほぼ接し $X = -0.175$ から $X = 0.5$ の間において 曲率半径が単調に増加する。従って(1)式によって表わされる曲線は 標準形越流頂を近似する曲線とみなすことができる。

3. ダムを越流する二次元流れの方程式

ダム越流頂の頂点を原点とし 越流頂面に沿って下流向きにx軸をとり これと垂直上向きにy軸をとる。またx軸と同心円をなす方向の流速をU y軸方向の流速をVとし 頂面の曲率半径をR 頂面の接線が水平となす角をθとする。θは下流に向って頂面の接線が水平線より下側にくるときが正である。pを流体の圧力 ρを流体の密度 gを重力の加速度とすれば 次式が得られる。

$$\frac{R}{R+y}U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{UV}{R+y} = g\sin\theta - \frac{1}{\rho}\frac{R}{R+y}\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{R}{R+y}U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{U^2}{R+y}=-g\cos\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left(1+\frac{y}{R}\right)V\right\}=0 \quad \cdots\cdots(4) \qquad \frac{\partial U}{\partial y}+\frac{U}{R+y}-\frac{R}{R+y}\frac{\partial V}{\partial x}=0 \tag{5}$$

流量を一定 流水の水深をh 水面におけるVの値をV_sとすれば (4)から $V_s=U_s\frac{R}{R+h}\frac{dh}{dx}$ となる。いまVが水面から越流頂面までの間に直線的に変化するものと仮定すれば $V=V_s\frac{y}{h}$ である。またV_sはxの増加にともなって減少するが $V_s=V_{s0}e^{-x/R}$ と仮定する。V_{s0}は$x=0$における値である。そうすれば $\frac{dV_s}{dx}=V_s\left(-\frac{1}{R}+\frac{x}{R^2}\frac{dR}{dx}\right)$ であるから $\frac{\partial V}{\partial x}=-V_s\frac{y}{h}\left(\frac{1}{R}-\frac{x}{R^2}\frac{dR}{dx}+\frac{1}{h}\frac{dh}{dx}\right)$ となり この関係を用いれば(5)式は容易に積分される。すなわち

$$U=\frac{q-\frac{Kh^2}{2}+KRh}{(R+y)\log\frac{R+h}{R}}+K(y-R) \quad \cdots\cdots(6) \qquad K=-\frac{V_s}{2}\frac{R}{h}\left(\frac{1}{R}-\frac{x}{R^2}\frac{dR}{dx}+\frac{1}{h}\frac{dh}{dx}\right) \tag{7}$$

となり 流れの水面における条件として次式が得られる。Eはエネルギ線から頂面までの高さである。

$$\left\{\frac{q-\frac{Kh^2}{2}+KRh}{(R+h)\log\frac{R+h}{R}}+K(h-R)\right\}^2\left\{1+\left(\frac{R}{R+h}\frac{dh}{dx}\right)^2\right\}=2g(E-h\cos\theta) \tag{8}$$

つぎに (5)を(3)に代入して これをyについて積分すれば $U^2/2+V^2/2-U_s^2/2-V_s^2/2=-(y-h)g\cos\theta-p/\rho$ となる。U_s V_sは流れの表面における流速である。この式をxで微分し (2)と(5)を用いれば

$$U_s\frac{dU_s}{dx}+V_s\frac{dV_s}{dx}=\left(1+\frac{h}{R}\right)g\sin\theta-\frac{dh}{dx}g\cos\theta \tag{9}$$

の関係が得られる。つぎに $dh/dx=(dh/dx)_0e^{-x/R_0}$ と仮定し $x=0$におけるdh/dx, Rの値を$(dh/dx)_0$ R_0とすれば (7)を微分して dK/dxの値が求められ (9)式から次式が得られる。

$$\left\{\frac{U_s}{(R+h)^2\log\frac{R+h}{R}}\left(KR^2+\frac{Kh^2}{2}-KRh-q\right)-\frac{U_s}{(R+h)^2\left(\log\frac{R+h}{R}\right)^2}\left(q-\frac{Kh^2}{2}+KRh\right)+K\right\}\frac{dh}{dx}$$

$$+\frac{U_s}{(R+h)^2\log\frac{R+h}{R}}\left\{\left(Rh-\frac{h^2}{2}\right)(R+h)\frac{dK}{dx}+\left(\frac{3}{2}Kh^2-q\right)\frac{dR}{dx}\right\}+\frac{U_s}{(R+h)^2\left(\log\frac{R+h}{R}\right)^2}\left(q-\frac{Kh^2}{2}+KRh\right)\frac{h}{R}\frac{dR}{dx}$$

$$+U_s(h-R)\frac{dK}{dx}-KU_s\frac{dR}{dx}-\frac{V_s^2}{R_0}=0 \tag{10}$$

従って (8)と(10)の両式を用いれば qが既知の場合のhの値を求めることができる。

計算の結果 $H_d=1.0^m$, $q=2.195\ m^3/s$ の場合 $h=0.756\ m$ $K=0.1719$ $V_s/U_s=-0.34$ となり WESなどで行なわれた実験の結果とよく合っている。