

神戸大学 正員 松梨順三郎

人工水路および自然河川の合理的設計において、水路の直線部および彎曲部における境界層流れの分布を予測することは非常に重要である。本研究は一般形状断面をもつ人工水路の彎曲部について、流れの一般解をうるとともに特に境界層流れの分布特性を理論的に解析することを目標として、その基礎方程式を誘導した。さらに拋物線形断面をもつ人工水路の彎曲部について、彎曲部入口附近の流れの特性に注目し、その数値解をえた。

1. 基礎方程式

一般の彎曲水路では、彎曲部の流れの曲率半径 r と流れの水深 h との比 r/h が十分に大きいと考えられ、その場合の定常流れの基礎方程式および連続式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{U_\theta^2}{r} &= R_0 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \\ U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} + \frac{U_r U_\theta}{r} &= 0 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial z} \\ 0 &= Z_0 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

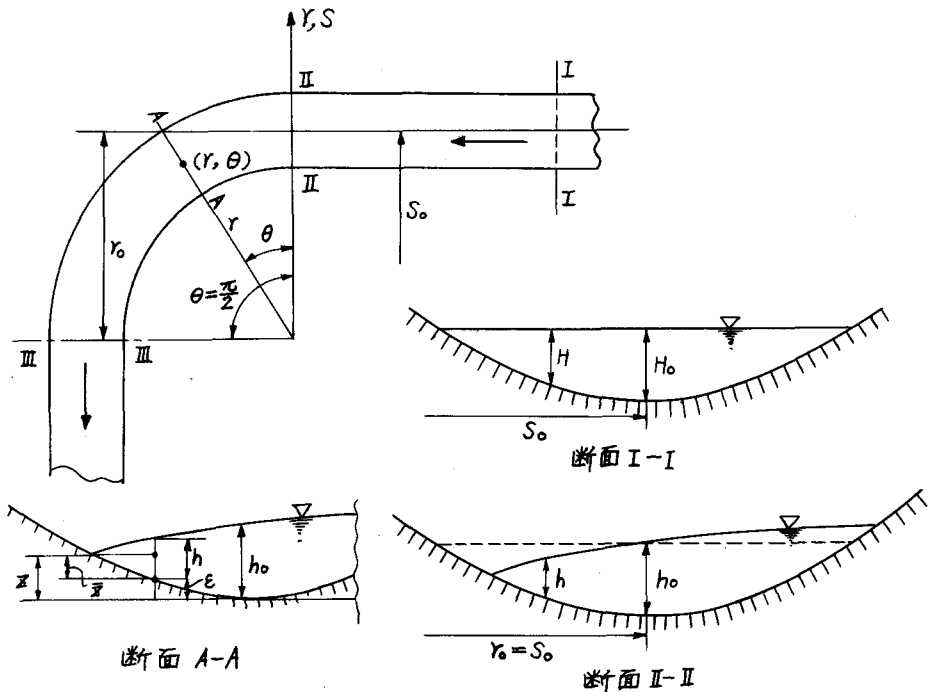


図-1 一般説明図

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

2=1に, $R_0 = -g \sin \alpha \cos \theta$, $\theta_0 = g \sin \alpha \sin \theta$, $Z_0 = -g \cos \alpha$ で, 記号はすべて慣用のとうを用いる。
(図-1参照) ななし α は座標面 $z=0$ から水平面となす角である。

座標面より水路底までの高さを z とし, (1) の第3式と積分すると次式となる。

$$p = \rho g (h + z - Z) \cos \alpha \quad (3)$$

(1) の第1, 第2式および(2)式に R_0 , θ_0 , Z_0 および(3)式と代入して, z から $h+z$ まで積分するわけであるが, $\bar{z} = z - z$ と変数変換するとによりこれを次の次式とする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \int_0^h U_r^2 d\bar{z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^h U_\theta U_r d\bar{z} - \frac{1}{r} \int_0^h U_\theta^2 d\bar{z} &= -gh \left(\sin \alpha \cos \theta + \frac{\partial(h+z)}{\partial r} \cos \alpha \right) - \frac{1}{\rho} \tau_{r0} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \int_0^h U_\theta U_r d\bar{z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^h U_\theta^2 d\bar{z} &= gh \left(\sin \alpha \sin \theta - \frac{\partial h}{\partial \theta} \cos \alpha \right) - \frac{1}{\rho} \tau_{\theta 0} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\int_0^h U_\theta d\bar{z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \int_0^h U_r d\bar{z} \right) = 0 \quad (5)$$

2=1に τ_{r0} , $\tau_{\theta 0}$ はそれぞれ境界面上における r 方向および θ 方向の剪断応力である。

つぎに, $\bar{z} = r \cos \theta \sin \alpha$ を導入し, これによって定義されるとなる諸量,

$$\left. \begin{aligned} J_{r0} &= -\frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial \bar{z}}{\partial r}, & J_{\theta 0} &= -\frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta} \\ I_r &= J_{r0} - \frac{\partial(h+z)}{\partial r}, & I_\theta &= J_{\theta 0} - \frac{\partial h}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

を導入すると, J_{r0} , $J_{\theta 0}$ はそれぞれ座標面の r 方向および θ 方向の勾配を表わし, I_r , I_θ はそれぞれ水表面の r 方向および θ 方向への勾配を表わす。(4)式に(6)の関係と代入して, 新変数 $\eta = \bar{z}/h$ と導入すると, (4)および(5)式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(rh \int_0^1 U_r^2 d\eta \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h \int_0^1 U_\theta U_r d\eta \right) - h \int_0^1 U_\theta^2 d\eta &= gh I_r r \cos \alpha - \frac{r \tau_{r0}}{\rho} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 h \int_0^1 U_\theta U_r d\eta \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h \int_0^1 U_\theta^2 d\eta \right) &= gh I_\theta r \cos \alpha - \frac{r \tau_{\theta 0}}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h \int_0^1 U_\theta d\eta \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(rh \int_0^1 U_r d\eta \right) = 0 \quad (8)$$

式(7)および(8)は以後の解析の基本となる基礎方程式である。

2. 彎曲部入口附近の流線の特性

一般に流れが直線部から彎曲部にはいると, 遠心力の作用を受け, 水表面は主流方向の勾配と同時に, それと直角方向すなわち r 方向にも勾配をもつようになる。図-1はその概要を示す。断面ⅠおよびⅡはそれぞれ彎曲部の入口および出口の断面を表わす。従来の実験結果によると, 水面の r 方向勾配は水路の彎曲部分のみならず, その直上流部分および直下流部分にもあらわれる。これは遠心力の効果がある部分にも及ぶものと考えてよい。このことから一般的には断面Ⅰの水面形は断面Ⅱ

のそれの影響を受けると考えられ。しかし、 $\Sigma = 2$ は断面Iは断面IIから十分は離れた上流断面で断面IIの水面の影響を受けないものとする。本研究では断面IIの水理特性を境界条件として用い、断面II, III間、すなわち弯曲部分の流水の解析を目標としていたが、本報告では、まづ断面IIの水理特性を得ることにから始めることにする。断面IIおよびその直上流では前述のように、遠心力の効果と評価しなければならぬ。このような考察から断面IIの流水の特性と想定する運動方程式として次式を得た。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S}(h+\varepsilon) &= \frac{\alpha_0 V_{0m}^2}{gS} \\ \frac{V_{0m}}{V_{0*}} &= 6.0 + \frac{1}{k} \log \frac{h}{K} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$h V_{0m} = H V_{0*} = g_0 \quad (10)$$

これら(9)式および(10)式はそれぞれ(7)および(8)式の特別の場合として位置づけられる。 $\Sigma = 1$ は図-1に示すように、直線区間断面I-IIの主流方向に直角にとられぬ距離を表わし、 V_{0m}, V_{0*}, h は $S=S$ 点における平均流速、摩極流速、水深であり、 H, V_{0*} は断面Iにおける水深、平均流速であり、 g_0 は単位幅流量で、 α_0 は係数、 k はカルマン係数、 K は断面粗度である。

放物断面水路を $\varepsilon = a_0(S-S_0)^2$ によつて定義し、 $V_{0m} = \sqrt{g H J_{00}} \{6.0 + (1/k) \log H/K\}$, $(h)_{S=S_0} = h_0 = H_0$ として、(9)の第1式および(10)式より V_{0m}, g_0 を消去し、さらに変数変換 $\xi = (S-S_0)/S_0$ を行くと次式を得る。

$$\begin{aligned} & h^2 \left(\frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right) - \\ & \frac{a_0 J_{00} (H_0 - a_0 S_0^2 \xi^2)^3}{(\xi+1)} \left\{ 6.0 + \right. \\ & \left. \frac{1}{k} \log \frac{H_0 - a_0 S_0^2 \xi^2}{K} \right\}^2 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

未定係数法によつて(11)式の級数解と求め次式を得る。

$$h = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \xi^m \quad (12)$$

$\Sigma = 1$,

$$b_0 = h_0 = H_0,$$

$$b_1 = \frac{1}{6} (B_0 - A_0 b_0)^2,$$

$$b_2 = \frac{1}{24} \{ B_1 - (b_1 + A_0 \cdot$$

$$(b_0 b_1 + b_1 b_0) - A_1 b_0^2 \},$$

$$b_3 = \frac{1}{36} \{ B_2 - (b_1 + A_0 \cdot$$

$$(b_0 b_2 + b_1 b_1 + b_2 b_0) - (2b_1 + A_1 \cdot$$

$$(b_0 b_1 + b_1 b_0) - A_2 b_0^2, \dots$$

$$A_0 = 0, A_1 = 2a_0 S_0^2,$$

$$A_2 = A_3 = A_4 = \dots = 0$$

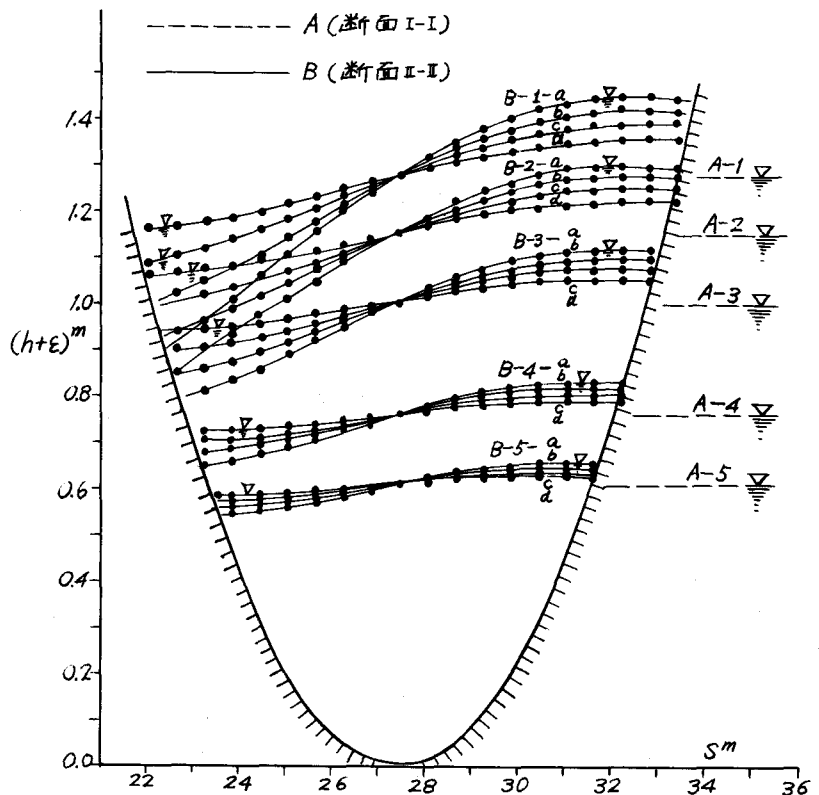


図-2 水面形(断面I-II, 断面II-II)

$$B_0 = \alpha_0 J_{00} \varphi(0), \quad B_1 = \frac{\alpha_0 J_{00}}{1!} \varphi^{(1)}(0), \quad B_2 = \frac{\alpha_0 J_{00}}{2!} \varphi^{(2)}(0), \quad B_3 = \frac{\alpha_0 J_{00}}{3!} \varphi^{(3)}(0), \quad \dots$$

$$\varphi(0) = g(0) f(0)^2, \quad \varphi^{(1)}(0) = g^{(1)}(0) f(0)^2 + g(0) \{ f^{(1)}(0) f(0) + f(0) f^{(1)}(0) \}, \quad \varphi^{(2)}(0) = g^{(2)}(0) f(0)^2 + 2g^{(1)}(0) \{ f^{(1)}(0) f(0) + f(0) f^{(1)}(0) \} + g(0) \{ f^{(2)}(0) f(0) + 2f^{(1)}(0) f^{(1)}(0) + f(0) f^{(2)}(0) \}, \quad \dots$$

$$g(0) = H_0^3, \quad g^{(1)}(0) = -g(0), \quad g^{(2)}(0) = -g^{(1)}(0) + g(0) + 3(-2\alpha_0 S_0^2) H_0^2, \quad g^{(3)}(0) = -g^{(2)}(0) + g^{(1)}(0) - 2g(0) - 6(-2\alpha_0 S_0^2) H_0^2, \quad \dots$$

$$f(0) = 6.0 + \frac{1}{k} \log \frac{H_0}{K}$$

$$f^{(1)}(0) = 0, \quad f^{(2)}(0) = -\frac{2\alpha_0 S_0^2}{k} H_0,$$

$$f^{(3)}(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = -2k f^{(2)}(0)^2 - (-2\alpha_0 S_0^2) \frac{f^{(2)}(0)}{H_0}, \quad \dots \quad (13)$$

(13)式の関係を(12)式に代入する

と、断面II-IIの水深 h がえられ、

つぎに(10)式より U_{0m} , (9)式の第

2式より τ_{00} がえられる。計算例

として、 $\alpha_0 = 1$, $Q_0 =$, $S_0 =$

27.45^m , $k = 0.4$, $K = 0.127^m$ を

用いた。図-2~4は $H_0 = 1.28^m$ (

A-1, B-1), 1.159^m (A-2, B-2), 1.00

7^m (A-3, B-3), 0.763^m (A-4, B-4),

0.610^m (A-5, B-5)のそれぞれに対して

(2, $J_{00} = 0.01$ (-a), 0.008 (-b),

0.006 (-c), 0.004 (-d)とした場合

の断面I-I(A), 断面II-II(B)に

おける水位 $(h+\varepsilon)^m$, 掃流力 τ_{00}

kg/m^2 , 平均流速 U_{0m}^m/s の分布

を示す。まづ図-2について、 H_0

が大きいほど兩岸の水位差が大き

くなり、また同じ H_0 に対して

J_{00} が大きくなるほど兩岸の水位

差が大きくなることからわかる。図

3によると、 J_{00} のいすれの場合にも

τ_{00} の分布は凹岸よりにならる。 J_{00}

が大きいほどこの傾向はいちじるしい。

この研究の細部計算については矢

原淳彦・藤本卓生氏によるものと

多い。ここに感謝の意を表す。

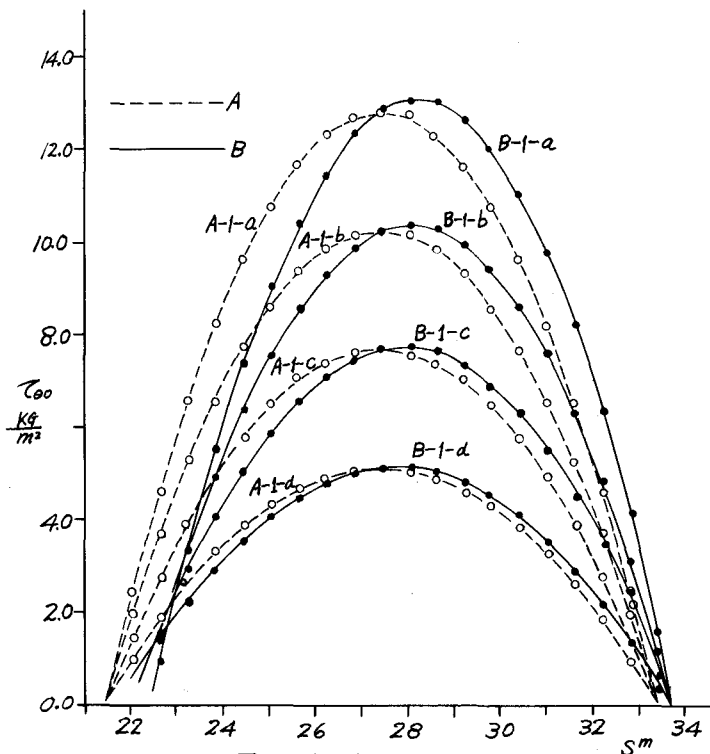


図-3 掃流力分布

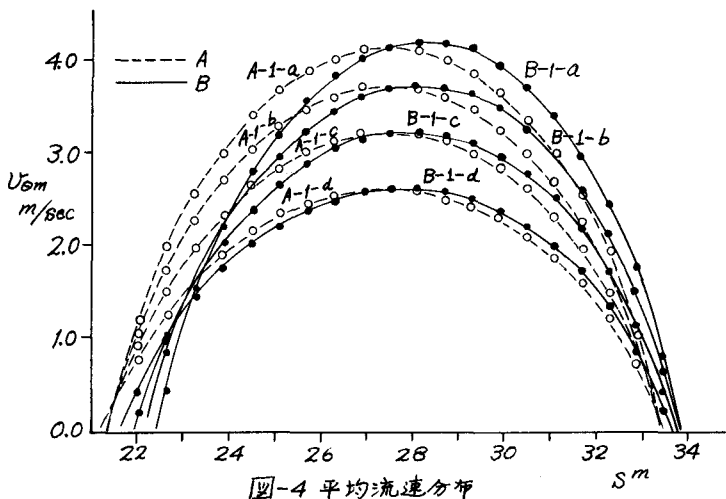


図-4 平均流速分布