II－43　　ダム貯水池による洪水制御におけるDP利用の問題点

京都大学工学部　正員　高棹琢馬
京大防災研究所　正員　○瀬能邦雄
京都大学大学院　学生員　横田穰二

1. はしがき

洪水制御を目的とするダム貯水池群の統合操作方式を確立するためには，洪水ハイドログラフ予知法の一層の発展，洪水流の流下合流機構，破壊力等の力学的諸現象の解明がもちろん必要であるが，それと同時に，水系全体としての最適洪水制御解を合理的，普遍的，かつ迅速に求める手法の確立もまた必要であることはいうまでもない。こうした手法としてR.Bellman[1]の提唱によるDP(Dynamic Programming)の応用がきわめて有効であると考え，われわれは基本的な単一のダム貯水池を有する洪水制御系のDPによる定式化を試み[2]，また現在の出水予知能力の限界にかんがみ，それを応用した適応制御に関する研究[3]を行なってきたが，今回は前者の拡張として一般的な洪水制御系のDPによる定式化を示し，つぎにこうした手法において直面する問題点のうち，とくに最適性の基準に関するもの，および多次元性の問題について若干考察を加えたので報告する。

2. 一般的洪水制御系のDPによる定式化

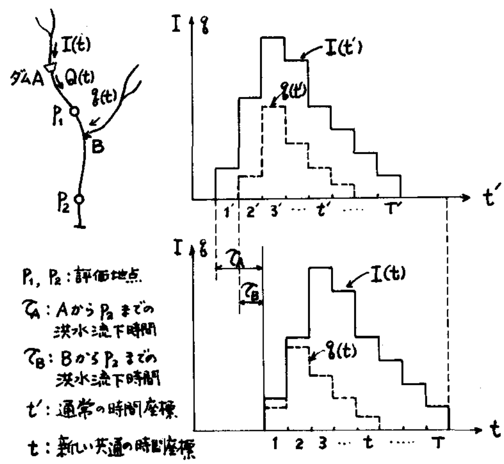
われわれが先に試みた単一ダムによる最適洪水制御過程のDPによる定式化はダムの貯水量(状態変数)，流入量(環境変数)，放流量(決定変数)をすべて離散的に扱い，評価地点(要防御区域を代表する地点)を通過する流量の大きさのみに支配されると考える評価関数Dの各離散期間ごとの値の全制御期間内の総和を目的関数として，それを最小とする決定変数列，すなわち最適放流量系列を求めるという考えに基づいている。これをそれぞれ複数の，ダム，流入支川(ダムを有しないもの)，評価地点を考慮する一般的な洪水制御系へ拡張するとつぎのようになる。すなわち，一水系内のダムの数をN，ダムk($k=1,2,\cdots,N$)の期間t($t=1,2,\cdots,T$；Tは全制御期間を等分した総数で制御最終期間を意味し，各ダムに共通となるようにする)における流入量，放流量をそれぞれ$I_k(t)$，$Q_k(t)$，期間tの期首の貯水量を$S_k(t)$，評価地点の数をm，評価地点iにおける評価関数をD_i，ダムkの有効貯水容量をV_kとし，制御終了時の貯水量$S_k(T+1)$をC_kと規定すれば，最適洪水制御解を得るためのDPの関数方程式は，

$$f_T(S_1,S_2,\cdots,S_N)=\sum_{i=1}^{m}D_i\Big(\sum_{k}^{b_i}\big(S_k(T)+I_k(T)-C_k\big)+\sum_{j}^{a_i}q_j(T)\Big)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$f_t(S_1,S_2,\cdots,S_N)=\min_{0\le S_k\le V_k}\Big\{\sum_{i=1}^{m}D_i\Big(\sum_{k}^{b_i}Q_k(t)+\sum_{j}^{a_i}q_j(t)\Big)+f_{t+1}\big(S_1(t)+I_1(t)-Q_1(t),\ S_2(t)+I_2(t)-Q_2(t),\cdots,S_N(t)+I_N(t)-Q_N(t)\big)\Big\}\cdots(2)$$

となる。ここに，f_tは期間t以後の目的関数の最小値であり，$\sum_{k}^{b_i}Q_k(t)$は評価地点iに直接関与する(途中他のダムを通過しない)b_i個のダムからの放流量の和，$\sum_{j}^{a_i}q_j(t)$は評価地点iに直接関与するa_i個の支川からの流量の和を表わし，これらは同時に評価地点iを通過すると考えている。すなわち洪水流の流下合流機構を線形と仮定しているわけであり，そのためダム地点あるいは支川最下流地点から，当該水系内で最下流に位置する評価地点までを洪水が流下する時間が定められ，上記各地点におけるハイドログラフをそれぞれその時間だけ平行移動することにより，それらのハイドログラフに新しい共通の時間座標を与えているわけである。図-1はその簡単な場合の例を示している。

以上に示したのは一般的洪水制御系のＤＰによる定式化のいわば骨組であり，実際には洪水流の流下合流機構は明らかに線形ではなく，きわめて複雑な現象であるため，今後こうした方面の研究の成果を組み入れてゆかねばならないことはいうまでもない。また，わが国ではダム上流や支川の洪水は一般に急激な流出をするのでそのハイドログラフを時間的余裕をもって精度よく予知することはきわめて困難であるため，計画対象洪水のような固定的なもの以外，すなわち現実の洪水に対処するためには必然的に適応制御を考えなければならない。ところで，このような問題をさておいてもなお以下に述べるような問題が残されている。



図－1

3．最適性判定の基準に関する問題について

洪水制御の最適性判定の基準をどのように定めるかということは，とりもなおさず洪水制御の目的をどう考えるかということであり，それはごく概念的にいえば“洪水によって引起される人間社会における被害を最小限度におさえる”ということであろう。ところがこの“被害”を受けるものは人身，資産，社会活動，さらには民心といったそれぞれ異質のものからなっており，それらの価値は共通の換算尺度をもたないため，被害を最小にするといってもそれに具体性をもたせることは非常に困難である。また，たとえ被害の評価が何んらかの方法で可能になったとしても，それと洪水の破壊力との関係を明確にすることは，洪水の破壊力自体も明らかでない現在ではほとんど不可能といえよう。すなわち洪水制御の厳密かつ客観的な最適性判定の基準を設けることは現在ではまず不可能といえる。このことをＤＰの手法を用いる場合についていえば，厳密な意味において，目的関数が一義的には定められないことを意味する。ところで現にわれわれは前項で述べたような目的関数を設定したわけであり，それはつぎのような理由に基づいている。すなわち，評価関数D_iとして期間tの間に評価地点を通過する流量に関する任意の単調増加凸関数を与えることによって，評価地点が一個所の場合は，(1)，(2)式の解が，評価地点におけるハイドログラフを可能な限り平滑化する（すなわちピーク流量をできるだけ小さくする）ようになるということを計算によって確かめたからである。このような解は，内水災害を別問題と考えれば，破堤の主原因が溢流であることから一般に好ましいものであり，その評価地点によって代表される地域にとって最適な洪水制御に近いものといえよう。したがってわれわれが設定した目的関数は今のところまず妥当といえる。しかし，評価地点が二地点以上存在する場合にはつぎのような問題が生ずる。すなわち，評価地点が一地点だけなら評価関数Dは任意の凸関数でよいが，二地点以上の場合には各評価地点の評価関数の間に相対的な関係を与えなければならず，それは具体的にどのようにすればよいか決定し難いということである。たとえば図-1に示したような洪水制御系において，評価地点P_1，P_2における評価関数をそれぞれ$D_1(Q)=aQ^2$，$D_2(Q)=bQ^2$とすれば，$a=0$の場合はbがどんな正数でもP_2においてハイドログラフは可能な限り平滑化され，$b=0$の場合はaがどんな正数でもP_1においてハイドログラフは可能な限り平滑化される。そして$b \gg a$の場合は前者に，$a \gg b$

の場合は後者にそれぞれ近い解が得られる。したがって a と b の大小関係が評価地点 P_1 と P_2 の重要度の大小と関係があることは推測される。しかし $b=n\cdot a$ なら P_2 の重要度は P_1 の n 倍であるといった関係を知ることはできない。また重要度自体の定義も不明確なものであり，定量的な比較をすることは困難である。しかし現実の河川では計画高水流量というものによって重要度を代表していると考えることができ，計画高水流量の決め方の問題を別にして，われわれはつぎのような方向で目下検討を進めている。すなわち，評価地点 i における計画高水流量を Q_{di} とし，制御の結果 i 地点を通過するピーク流量を Q_{pi} とするとき，$Q_{pi}/Q_{di} \leq 1$ でかつ左辺の値がすべての i に対してできるだけ均等になるような解を与える評価関数 D_i を数多くのケースについて計算することによって追求しようとしている。しかしこのような条件を満足する評価関数 D_i は一義的に決定できない恐れもあり，何か全く別の形式の目的関数を設定することも考えている。

4．多次元性の問題と次元の節減化の可能性について

DPの分野においては，さらに多次元性の問題がある。これは端的にいえば，次元数が多くなることによって計算の実行可能性に限界が生じるということである。たとえば，(1)，(2)式を電子計算機で解く場合を考えると，1次元すなわちダムの数 $N=1$ の場合，$f_t(S_1)$ の値が $0 \leq S_1 \leq \overline{V}_1$ にわたって100必要（ダムの貯水量の段階を100とする）なら少なくとも100語の記憶容量が必要であり，2次元すなわち $N=2$ の場合，$f_t(S_1, S_2)$ の値が $0 \leq S_1 \leq \overline{V}_1$，$0 \leq S_2 \leq \overline{V}_2$ にわたってそれぞれ上と同様の間隔で必要なら少なくとも $100 \times 100 = 10^4$ 語の記憶容量が必要となる。同様に $N=3$ なら 10^6 語必要となる。すなわち次元数の増加とともに必要な記憶容量は幾何級数的に増加し，それと同時に計算時間も飛躍的に長くなる。ところがわが国の大型計算機でも記憶容量はせいぜい 8×10^5 語にすぎない。[4] それで1次元の場合は計算に要する時間もごくわずかであり，2次元の場合は最近の計算機でも可能であるが計算時間は相当長くなる。さらに3次元になると解けない場合が多く，あるいは解けても非常に長時間を要する。たとえばFACOM 230-60によって計算した数例の所要計算時間を示すと表-1のようである。3次元の場合も行なっているが，これはダムの有効貯水容量の分割を非常に粗くしたから可能になったわけであり，このように粗い分割による解は実用上妥当か否かという問題が生じるが，まだ十分な検討は行なっていない。このように次元数が多くなると(1)，(2)式をそのまま解くことに実用上の問題を生じるわけであり，この問題を解決するには次元の節減化をはからねばならない。そこで，多次元問題をより低次元の問題に置き換えることが可能か否かの検討が必要となる。つぎにこの次元の節減化の可能性について若干考察を行なった結果を述べよう。

表-1

ダムの配置形式	直列 ([illegible])			並列		
ダムの数N（次元数）	1	1	2	2	2	3
評価地点の数 m	1	2	1	2	3	1
制御期間の数 T	15	14	9	10	10	10
有効貯水容量の分割数 V	100	60	20	20	20	10
計算時間（sec）	32	18	196	300	387	945

a)直列配置のダム群の場合；図-2に示すような簡単な2次元洪水制御系を考えよう。この場合，次元の節減化を行なうには，制御系を分解する，つまりダムAとダムBの最適制御解を別個に求めるしかないであろう。すなわち，まずダムAの流入量系列 $\{I(t)\}$ $(t=1, 2, \cdots, T)$，評価地点を一地点1のみとする系において最適放流量系列 $\{Q_A'(t)\}$ $(t=1, 2, \cdots, T)$ を決定し，つぎにダムBがその $\{Q_A'(t)\}$ を流入量系列

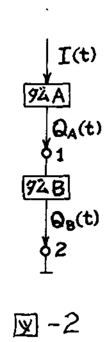
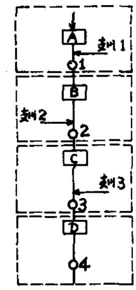


図-2

として，評価地点を2のみとする系で最適放流量系列$\{Q_B(t)\}$を得るということである。そしてこのように分離して別個に最適解を求めた場合(方式①)の結果が，系を全体として最適化する(1)，(2)式による2次元問題を解く場合(方式②)の結果と同等であることが理論的に証明できれば，2次元問題を1次元問題の繰返しに変換できることになり，計算時間は著しく短縮できる。結論をいえば，評価関数として単調増加凸関数を与える限り，図-2に示すような洪水制御系の場合には背理法によって，方式①と方式②は同等であることが証明できる。この結果を演繹すれば，図-3に示すような場合にも，すべて1次元の系に分離して全体としての最適解を得ることが可能となり，4次元問題が1次元問題の繰返しに帰着される。しかし同様な系でも図-4のように評価地点2および3がそれぞれ支川2および3の上流に配置されている場合には支川の効果によって一般には図-4に示すように1次元と3次元の問題にしか分離できない。すなわち評価地点の位置が次元の節減化に関係してくるわけであり，評価地点の位置選定の問題が生ずる。



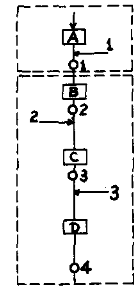


図-3　図-4

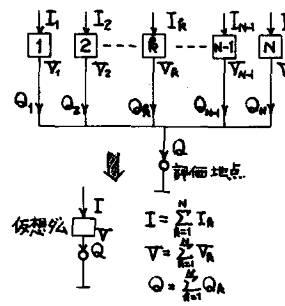


図-5

b)並列配置のダム群の場合；一般に図-5のような並列配置の場合，つぎのようにしてN次元問題を1次元問題に変換できる。すなわち，有効貯水容量を$V=\sum_{k=1}^{N}V_k$，流入量を$I(t)=\sum_{k=1}^{N}I_k(t)$，期間tの期首の貯水量を$S(t)=\sum_{k=1}^{N}S_k(t)$，放流量を$Q(t)=\sum_{k=1}^{N}Q_k(t)$，制御終了時の貯水量を$C=\sum_{k=1}^{N}C_k$とするような一つのダムを想定することにより，1次元解析によって最適放流量系列$\{Q(t)\}$ $(t=1,2,\cdots,T)$が求まる。この$Q(t)$を各ダムの放流量として合理的に分配すればよいわけである。その分配法として期間tにおけるダムの貯水量と有効貯水容量の比$S_k(t)/V_k$ $(k=1,2,\cdots,N)$の大きさに応じた比例配分が妥当と考えられる。ただ，$S_k(t)+I_k(t)-V_k \leq Q_k(t) \leq S_k(t)+I_k(t)$なる条件のため，$Q_k(t)$がその比例配分値をとることができないことがあり，そのときはできるだけその値に近づけるようにすればよいだろう。

5. あとがき

以上，一般的洪水制御系に対するDPの定式化の骨組を示し，こうした手法における問題として，最適性判定の基準に関連して目的関数，重要度等の問題点について述べ，さらにダムの数が多くなった場合の多次元性の問題と，その障害を除くための次元の節減化について若干考察したが，最後の問題に関して，実際の水系においては直列，並列が混在していることが多く，ここで挙げたようなモデル的な水系とは一般に異るので，上述の手法による次元の節減化が不可能な場合も多く，このような場合にはもっと一般的な数学的手法(たとえばラグランジュの乗数法等)を用いて次元の節減化をはかることが考えられ[5]，今後の課題の一つとしたい。

参考文献

1) R. Bellman ; Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1957.

2) 高棹・瀬能・入江・三谷；ダムによる洪水制御に関する一考察，土木学会関西支部年次学術講演会講演概要，1968.

3) 高棹・瀬能・入江；ダムによる洪水流出の適応制御，土木学会第23回年次学術講演会講演概要，1968.

4) たとえば野村電子計算センター編；100万人のコンピューター事典，コンピューター・エージ社，1968.

5) たとえば小田中敏雄；ダイナミック・プログラミング，丸善株式会社，1962.