

1 はじめに

南水路不定流の数値計算を実施する場合の、特性曲線法による解析の問題を取扱う。一般に、特性曲線法は理論的見地からは非常に明解な方法である。偏微分方程式を常微分方程式に変換し、常に影響領域を考慮しながら計算が行えるなど、秀れた利点を有している。そのために各方面で応用され、その優位性が実証されている。一方、そのあまりに巧みな方法のために、特性曲線という非常に繊細な性質を利用する点において、逆に警戒心をおこさせる。主な問題点は、(基礎式からの特性曲線に因する方程式の誘導は完全なものであるが)、差分をとる段階に入り込む誤差、格子法などにより計算が実施されるときに入る誤差、および一元流としての取扱いなどであろう。特性曲線法では、基礎方程式としての運動方程式および連続方程式が、そのオリジナルな形を保ち得ず、入りまじって作用するために、問題点の解明を複雑にする。

ここでは、特性曲線法により不定流の数値計算を実施するときの各種の誤差の原因について簡単な考察を試み、ついで計算法として多少なりとも不明な点が残されているならば、複雑なものより簡単なものの方がよいという単純な考えに基づいた、一つの簡易計算法について述べる。これは、オーダー的には小さいが、特性曲線において大きな影響を与える流れの運動方程式の不定項を省略したものである。また、水路の横断形状としては変断面のものも取扱えるようにした。

2 基礎方程式、および特性曲線(一般の場合)⁽¹⁾

変断面および横断における粗度係数の変化を考慮して、不等流に対する井田式⁽²⁾および不定項に対する岸平山⁽³⁾の補正式を用いると、不定流の運動方程式は、(記号は通常記号を用い、一括文末に記す)

$$\frac{\rho}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2g} \frac{\partial (DU^2)}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = i_0 - i_f \quad (x \text{の向き; 上流より下流へとる}) \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{ここに、} E = \psi \left[\left(A \int_B \frac{h^{3/2}}{n^2} d\xi \right) / \left(\int_B \frac{h^{3/2}}{n} d\xi \right)^2 \right], \quad i_f = \frac{N^2 U^2}{R^{4/3}}, \quad R = \left(\frac{1}{A} \int_B h^{3/2} d\xi \right)^{2/3}$$

$$D = \alpha \left[\left(A^2 \int_B \frac{h^2}{n^2} d\xi \right) / \left(\int_B \frac{h^{3/2}}{n} d\xi \right)^3 \right], \quad N = \left(\int_B h^{3/2} d\xi \right) / \left(\int_B \frac{h^{3/2}}{n} d\xi \right)$$

である。βは1であるが、後の考察のために便宜上つけたものである。従属変数を平均流速から流量にあらため、微分項の中のEおよびDを区間の平均値を用いることにして外に出すと、(1)式は、

$$\frac{1}{gA} \left[\beta E \frac{\partial Q}{\partial t} - \beta E \frac{Q}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + D \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - D \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} \right] + \frac{\partial h}{\partial x} = i_0 - i_f \quad \text{--- (2)}$$

となる。連続方程式は、次式によって表わされる。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \Delta q \quad \text{--- (3)}$$

特性曲線の関係を求めるために、例えば $\partial h / \partial x$ を計算する。この場合、偏微分項を変数とし、その係数は定数またはある時間に関し一定値と考える。変数は、 $\partial h / \partial x$, $\partial A / \partial x$, $\partial A / \partial t$, $\partial Q / \partial x$, $\partial Q / \partial t$ の5項である。(2)式および(3)式のほかに、全微分の関係

$$\frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial t} dt = dA \quad \text{--- (4)}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial t} dt = dQ \quad \text{--- (5)}$$

および⁽⁴⁾王による、ある時刻における流下方向の断面変化率

$$i_* = \frac{1}{B} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_* = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{--- (6)}$$

を用いる。(2)式~(6)式より、 $\partial h / \partial x$ は

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \Delta g \\ -\beta E \frac{Q}{A} & D \frac{Q}{A} & \beta E & -D \frac{Q^2}{A^2} & gA(i_0 - i_f) \\ dt & 0 & 0 & dx & dA \\ 0 & dx & dt & 0 & dQ \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{B} & i_* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta E \frac{Q}{A} & D \frac{Q}{A} & \beta E & -D \frac{Q^2}{A^2} & gA \\ dt & 0 & 0 & dx & 0 \\ 0 & dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{B} & -1 \end{vmatrix}} \quad \text{--- (7)}$$

となる。特性曲線の方角は(7)式の分母をゼロとおくことにより得られる。 $\sqrt{gA/B} = \omega$, $Q/A = U$ とすれば、 $\beta E(dx)^2 - U(D + \beta E)dt dx + (DU^2 - \omega^2)(dt)^2 = 0$ --- (8)

$$\therefore \frac{dx}{dt} = C_{1,2} = \frac{\beta E + D}{2\beta E} U \pm \sqrt{\left(\frac{\beta E - D}{2\beta E} \right)^2 U^2 + \frac{\omega^2}{\beta E}} \quad \left(\begin{array}{l} C_1 \text{---} + \sqrt{\quad} \text{の場合} \\ C_2 \text{---} - \sqrt{\quad} \text{の場合} \end{array} \right) \quad \text{--- (9)}$$

である。変断面の影響も考慮せず($D=E=1$), $\beta=1$ のときは(8)式より、 $C_{1,2} = U \pm \omega$ が得られる。勾配 $C_{1,2}$ の特性曲線上でなりたつ方程式は(7)式の分子をゼロとして、

$$\beta E i_* C^2 + \left[\beta E \frac{\Delta g}{B} - \beta E i_* U - D i_* U - \frac{\beta E}{B} \frac{dA}{dt} \right] C + \left[\omega^2 (i_0 - i_f) + D i_* U^2 - DU \frac{\Delta g}{B} - \frac{\beta E}{B} \frac{dQ}{dt} + \frac{\beta E}{B} U \frac{dA}{dt} + D \frac{U}{B} \frac{dA}{dt} \right] = 0 \quad \text{--- (10)}$$

となる。 i_* を消去するために、 $A(H)$ と考え、 $\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial h} = B \frac{\partial h}{\partial t}$ より、 $\frac{1}{B} \frac{dA}{dx} = \frac{1}{B} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} \frac{dt}{dx} \right) = i_* + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial t} \frac{dt}{dx} = i_* + \frac{dh}{dx}$, また $dh = dH + i_* dx$ であるから、(10)式は(8)式の関係をも用いて変形すれば、

$$\left\{ \beta E (U - C_{1,2}) + DU \right\} \frac{dA}{dt} + \omega^2 \frac{dA}{dx} - B \omega^2 \frac{dh}{dx} - \beta E \frac{dQ}{dt} - \left\{ B \omega^2 i_f + (DU - \beta E C_{1,2}) \Delta g \right\} = 0 \quad \text{--- (11)}$$

である。これより $A(H)$ の関係が与えられれば、例えば試行錯誤法により計算がすすめられる。

3 計算過程において入りこむ誤差の原因

一般に、2階の楕円型非線型偏微分方程式の特性曲線法による数値解はかなりよい結果を与えることが報告されている^[5]。これは、(9)式と(11)式までは何人らの省略もなく基礎方程式と同値であり、差分式にする段階や固定歩法などで数値計算を行う段階においても、水路特性や水理量の縦断変化が大きくなければ、まずまずの結果が得られるということであろう。ここでは全ての場合に完璧を期すために、計算過程において入りこむ誤差の主な原因を今エックすることを試みる。

a. 微分式を差分式とし、たとえば固定歩法により数値計算を実施する段階で入る誤差

差分式はもとの微分式と同値ではないが、 Δx および Δt を小さくすれば一般に精度があがることが多

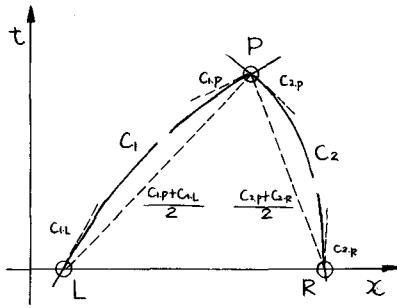


図-1 二本の特性曲線
(固定法)

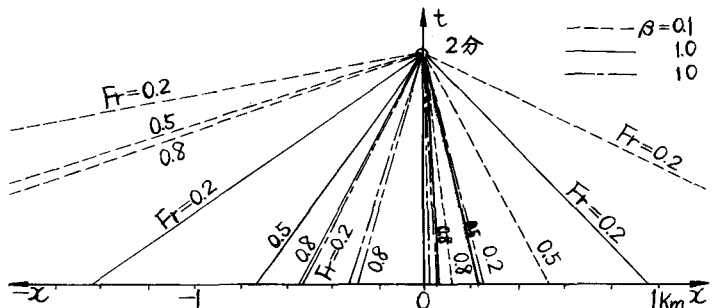


図-2 特性曲線の β による変化 ($D=E=1$)
($U=2\%$)

い。特性曲線による不定流解析の誤差の伝播については、星畑⁽⁶⁾⁽⁷⁾による検討がある。(9)式に基づく特性曲線の方は大きい問題とはならない。この場合、特性曲線を直線近似することは認容され、特性曲線の勾配を図-1のL点およびR点(水理量は固定点間で内挿)で代表させるよりは、Cunge⁽⁸⁾が主張するようにL点およびP点、あるいはR点およびP点の平均をとる方が精度はあがる。特性曲線上で成立する(11)式は、基礎式の運動式や連続式そのものではなく、いわば「ごちやませ」にしたものの一部である。運動式の関係および連続条件は、L点およびR点においてそれぞれ満足されても、L点の半分とR点の半分とから算出されるP点において満足される保証はないと考えられる。縦断変化が小さい場合は問題とされないが、縦断変化の激しい水路では Δx を小さくとる必要が感じられる。

8. 運動方程式の不定項の影響⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾

運動方程式の中の不定項は、ダム崩壊時に生じる浸波とか、鉄砲水の場合には重要な項であるが、通常の河川の洪水等においてはオーダーが大きくない。ちなみに、木曽川笠原(40.2km)における $\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$ は $10^5 \sim 10^6$ 程度であり、他の項の $10^3 \sim 10^4$ に比して小さい。これは他の項の誤差程度とみなしてよいであろう。(2)式における $\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t}$ と $\frac{Q}{gA^2} \frac{\partial A}{\partial t}$ は $\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$ とほぼ同じオーダーと考えてよい。連続式においては同オーダーである。特性曲線法において、運動式の不定項の役割は特性曲線および特性曲線上で成り立つ常微分式の両方に入り、(9)式および(11)式において β により表わされる。図-2は $D=E=1$ 、および一例として $U=2\%$ の場合について、特性曲線の β による変化の様子を示したものである。特性曲線は Fr にもよるが、基礎方程式においてあまり意味のない不定項が特性曲線の方向を定めるうえに重要な役割を演じていることは明らかである。特性曲線が変化すれば、使用する断面の位置が変化し、また、攪乱の伝播速度が不定項の大きさに大きく左右されるのも困る。物理的内容はともかくも、縦断変化の大きい場合には、この点からも問題が生じてくる。なお、(11)式においても β が入っているが、(9)式と組み合わせた検討は行わない。

9. その他 特性曲線法に限らず一般的なもの、例えば、一元的取り扱い(断面平均)、および諸条件の与え方(境界条件、初期条件、粗度係数、まっつ以外の損失、および断面形状の影響⁽³⁾)などがある。

4 簡易計算法(片押しの方法)

一般に、複雑なものより単純なものの方が秀れており、不明な点が残されているならば、無理な省略がない限り、物理内容の判然としたものが望ましいといえるであろう。運動方程式において不定項

がオーダー的に小さい場合には、これを省略することができる。連続式の不定項はそのまゝ考慮する。この場合、特性曲線の一本は x 軸に平行になり、一本のみのいわゆる片押しの方法になる。(8)式において $\beta=0$ とすれば、

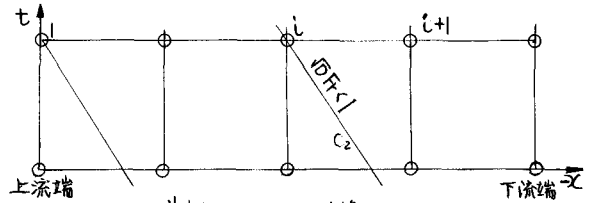


図-3 片押し法による計算

$$\begin{cases} dt=0 \\ dx/dt = G_2 = U - \omega^2 \frac{dU}{dU} = U \left\{ 1 - \frac{1}{(DFr)^2} \right\} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} G_1 : DFr > 1 \text{ の場合} \\ G_2 : \quad < 1 \quad \quad \quad \end{array} \right) \quad \text{----- (12)}$$

である。 DFr が1より小さいとき、特性曲線の勾配は負となる。特性曲線 $dt=0$ 上で成り立つ方程式

$$\text{は、} \quad \frac{DU}{g} \frac{dU}{dx} + \frac{dH}{dx} + i_f = 0 \quad \text{または} \quad \frac{DQ}{gA^2} \frac{dQ}{dx} - \frac{DQ^2}{gA^3} \frac{dA}{dx} + \frac{dH}{dx} + i_f = 0 \quad \text{----- (13)}$$

および G_2 上で成り立つ方程式は(11)式において $\beta=0$ とすれば、

$$DU \frac{dA}{dt} + \omega^2 \frac{dA}{dx} - B\omega^2 \frac{dH}{dx} - B\omega^2 i_f - DU\omega g = 0 \quad \text{----- (14)}$$

である。 $DFr < 1$ の場合には x として下流より上流向きにとる方が便利であるが、このとき(14)式において第1項および第5項の符号が変わる。そして、計算は上流端よりすすめる。 $DFr > 1$ の場合には、すべてが逆になる。境界条件は通常上流端において Q 、下流端において H が与えられる。

このような計算法にしたがえば、不定流効果は貯留量の変化のみとなるが、3節aおよびcで挙げられている諸問題点が相当程度改善されていることがわかる。

5 おわりに

よくわからない点があるなら複雑なものより簡明なものの方がよいという主旨で考察をすすめた。今後、計算例等を通じて、さらに計算法の細部について検討し、特に誤差の伝播の仕組みについてさらに考察する予定である。最後に、土木研究所の星畑研究員と討議の機会をもったことを記して謝意を表したいと思う。

[記号]	A: 断面積 B: 水路巾 C, C₁₂: 特性曲線の勾配 D: 変断面に因する定数, (1)式 E: " Fr: フルード数, $\sqrt{U/\omega}$ g: 重力加速度 h: 水深 H: 水位	i₀: 河床勾配 i_f: エネルギー勾配 i_x: 断面変化率, (6)式 n: 粗度係数 N: 変断面に因する定数, (1)式 q₀: 単位巾当り横流入量 Q: 流量 R: 変断面に因する定数, (1)式 t: 時間	U: 平均流速 x: 縦断方向距離 α: 流速分布による補正係数 β: 定数 ξ: 横断方向距離 η: 流速分布による補正係数 ω: 長波の伝播速度, $\sqrt{gA/B}$
------	--	---	---

[参考文献]

- [1] 星畑国松: 不定流の数値計算法について(1)および(2), 土木技術資料(土研)8-7 および 8-11, 1967
- [2] 井田至春: 広中夏間水路の定常流(断面形の影響について), 土木学会論文集69号別冊3-2, 1960
- [3] 岸・平山: 変断面水路における非定常流の数値解法, 土木学会21回年次学術講演会, 1966
- [4] 王 方一: 開水路非定常流の計算法と例, 土木技術資料(土研)5-5, 1963
- [5] たとえば R. Abtizer and chintu Lai: Computer Simulation of Unsteady Flows in Waterways, ASCE, Hy. 4, 1968
- [6] 星畑国松: 特性曲線法による誤差の伝播について, 土木学会21回年次学術講演会, 1966
- [7] 星畑国松: 不定流の数値計算法に対する一考察, 土木学会22回年次学術講演会, 1967
- [8] J. A. Cunge: 文献[5]の Discussion, ASCE, Hy. 2, 1969
- [9] 須賀克三: 特性曲線法による河床変動計算について, 土木学会水理講演会, 1969
- [10] 須賀克三: On the Simulation of River Bed Variation by characteristics IAHR, 1969