II−23　差分解法による不定流計算の時間差分のとり方

建設省土木研究所　正員　木下武雄

1. 概要：　不定流計算を行なう方法はいろいろある。微分方程式を差分方程式に直接的に変えて解く方法もそのうちの一つで、著者はすでに土木学会論文集オ63号，64号においても発表している。この方法には計算安定性について若干の考慮が必要である。空間差分については上記論文および科学技術庁資源局資料オ33号に述べたが時間差分についてここで述べる。

2. 結論：　時間差分については、連続方程式では前方差分，運動方程式では後方差分により、よい結果がえられる。

3. 連続方程式：

$$\frac{\partial A}{\partial t} = q - \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

Aは流水断面積、qは横流入量，Qは流量。これは省略しないで用いる。Aの、従って水位の時間変化を将来に対する変化分という形で、前方差分とる。(5,6、で述べる。)

4. 運動方程式：　断面内の平均流速$u(t,x)$を用いて

$$\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial x} - i + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{n^2|u|u}{R^{4/3}} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

となるが、各項のオーダーを比較し、重要な項のみで計算し、計算不安定の原因となる項を避けなければいけない。iは河床勾配，hは水深，Rは径深，nは粗度係数。

水路が急勾配であれば、

$$-i + \frac{n^2|u|u}{R^{4/3}} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

水路の粗度，波形の周期にもよるが，概念的には$i = 1/500 \sim 1/1000$程度の河川を指し、この式が成立つことは、水位・流量曲線が成立つ河川であることを示している。

水路が少しゆるくなると

$$-i + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{n^2|u|u}{R^{4/3}} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

が成立つ。これは水位・流量曲線がゆるくループを描く場合である。

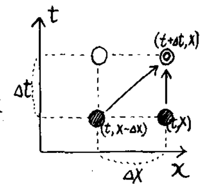
さらにゆるい水路では、各項の大きさがほぼ同程度であり，運動方程式は省略しないで用いなければならない。ここで$\partial/\partial t$の問題がおこる。例えば感潮河川である。

5. 差分法則：　差分法則について一瞥しよう。

dy/dxの例で言えば、2点近似、3点近似とあるが、多点近似の方がテーラー展開の残差は少さくなる。これはスムースな曲線について言えることで，川幅等変化の激しい実際河川の場合、恐らく影響ないと考えられる遠くの点を入れれば誤差が小さくなることは理解しにくい。実用的には

d/dx は $y(x+\Delta x)-y(x)$ または $y(x)-y(x-\Delta x)$, d^2/dx^2 は $y(x+\Delta x)-2y(x)+y(x-\Delta x)$ のタイプがよい場合が多い。d/dt についても同様である。

また物理的に理解しやすい差分法則が必要である。例えば、(1),(3) を連立させる時に、$\partial Q/\partial x$ を後方差分 $Q(x)-Q(x-\Delta x)$ にとらないと、上流からの洪水波が伝わらない。そして、$\partial A/\partial t$ は前方差分 $A(t+\Delta t)-A(t)$ ととると安定で、かつ容易に解が求められる。



6. $\partial/\partial t$ のとり方: 連続方程式と運動方程式とを (1) (2) の形で連立すると $\partial^2/\partial t^2$ ができる。これを上記の $u(t+\Delta t)-2u(t)+u(t-\Delta t)$ のタイプにするために、(1), (2) の一方を前方差分にしたら他方を後方差分にせねばならない。連続方程式では前方差分がよいので、運動方程式では後方差分がよいことになる。

水平な水路での短周期の変動(例えば潮汐)では (2) の中の $1/g\cdot\partial u/\partial t$ は相対的には大きくなるが、そうでなければこの項はあまり大きくはならない。この項をとってしまった残り

$$\frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial x}-i+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{n^2|u|u}{R^{4/3}}=0$$

は不等流計算の基礎式である。雑に言えば不等流計算の数値解の誤差のようなものが $1/g\cdot\partial u/\partial t$ とも言える。前方差分にとったとすると、この項で将来の u を外挿するのには一考を要する。

$1/g\cdot\partial u/\partial t$ の物理的意味は慣性である。慣性とは現在の u は過去の u と著しくはちがわないということであるから、$u(t)-u(t-\Delta t)$ とおけばこの差分で物理的意味を表現できる。もし水面勾配などの影響で、著しく異る u が算出されそうになったら、この項がブレーキの役割を果す。

7. 結び: 著者は上記の観点より差分解法により、湖における振動(土木技術資料 Vol 5. No. 3)感潮河川の潮汐(利根川潮止水門設置に伴う下流部への影響調査)等について計算した。また実験水路における例を右に示す。上にブレーキと述べたように働く計算式については短周期の現象をどこまで追従できるか疑問なので、学会での発表をひかえていたが、有益な示唆を賜りたく、ここに発表する次第である。

実験水路長 150 m, 幅 30 cm

水路勾配: ほゞ水平

測定 10 m ごと、10 秒ごと

計算 $\Delta x = 10$ m, $\Delta t = 5$ sec