II−2 海峡を通過する波浪について

神戸大学工学部 正員 ○杉本修一
明石工業高等専門学校 〃 工修 西村益夫

スリットのような開口部を通過する波浪については多くの人によってもうすでに研究されている。著者もこの問題について以前に発表したことがある。スリットの場合と違い同一波長の波であっても海峡を通過する場合には海峡の形によって波浪性状は変ってくる。海峡の形によって波浪性状がどのように変るのか？ それは海峡附近の港や海峡を通過する船にとっては大切なことである。

そこで問題を理想化して，x軸に対称な双曲線を考え，この双曲線を海峡と見做して，この向に波が入ってくる場合について考えることにする。この報告はこのような問題に対する1つの試みである。

(1) 基礎方程式

x軸に対称な双曲線は

$$x + iy = c\,\mathrm{sh}(\xi + i\eta) = c\,\mathrm{sh}\xi\cos\eta + ic\,\mathrm{ch}\xi\sin\eta. \qquad (1)$$

$$x = c\,\mathrm{sh}\xi\cos\eta, \qquad y = c\,\mathrm{ch}\xi\sin\eta. \qquad (2)$$

なる座標変換で表わされる。

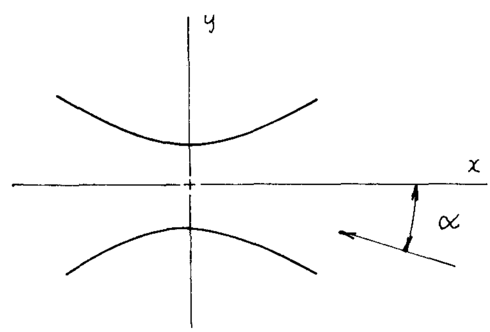
波動方程式は
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\sigma^2}{gd}\phi = 0.$$

で与えられる。この方程式を上記の座標で変換すれば

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial \eta^2} + \frac{c^2\sigma^2}{2gd}(\mathrm{ch}\,2\xi + \cos 2\eta)\phi = 0 \qquad (3)$$

を得る。これを基礎方程式とする。

(2) 入射波



図のようにx軸に対して α なる角度で入ってくる入射波の波動関数 ϕ_I は

$$\phi_I = \exp\{ikc(\mathrm{ch}\xi\sin\alpha\sin\eta - \mathrm{sh}\xi\cos\alpha\cos\eta)\}.$$

で与えられる。そこで (4)

$$\mathrm{ch}\xi\sin\alpha = p\cos\xi_0 \qquad (5)$$
$$\mathrm{sh}\xi\cos\alpha = p\sin\xi_0 \qquad (6)$$
$$\mathrm{sh}^2\xi + \sin^2\alpha = p^2 \qquad (7)$$

と置けば上式の ϕ_I は $\phi_I = \exp\{-ikcp\sin(\xi_0 - \eta)\}$

で与えられる。この式の実部をとれば

$$\phi_I = J_0(kcp) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\{J_{2m}(kcp)\cos 2m(\xi_0 - \eta)\}. \qquad (8)$$

しかるに、$\eta=\pm\eta_0$ の境界上では $\partial\psi/\partial\eta=0$ でなければならぬ。そのために次ぎの

$$\psi_{12} = \sum C_m \cos\left(\frac{2m-1}{2}\frac{\pi}{\eta_0}\eta\right) \tag{9}$$

なる関数を加えて境界条件を満足するように C_m を定むれば

$$C_m = \pm(-1)^{m+1}\frac{\eta_0}{\pi}\frac{8m}{2m-1}J_{2m}(kcp)\sin 2m(\xi_\theta \mp \eta_0). \tag{10}$$

更にx軸上では $0<\eta<\pi/2$ と $-\pi/2<\eta<0$ の両領域における値が一致せねばならぬ。そのため

$$0<\eta<\pi/2, \qquad \psi_1 = \psi_{11}+\psi_{12}+\psi_{13}. \tag{11}$$

$$-\pi/2<\eta<0, \qquad \psi_1 = \psi_{11}+\psi_{12}-\psi_{13}. \tag{12}$$

なる関数 ψ_{13} を考え、x軸上で両領域の値が一致するように ψ_{13} を定むれば

$$\psi_{13} = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\eta_0}{\pi}\frac{8m}{2m-1}J_{2m}(kcp)\sin 2m\xi_\theta\cos 2m\eta_0\,\cos\frac{m\pi}{\eta_0}\eta. \tag{13}$$

(3) 拡散波

海峡の最狭部を通過後拡散してゆく波について、その波動関数 ψ_2 について考える。この波は

$$\text{at } \eta=\pm\eta_0, \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial\eta}=0. \qquad \text{at } \xi=0, \quad \psi_2=\psi_1. \tag{14),(15}$$

なる境界条件を満足せねばならぬ。そのために

$$\psi_2 = \psi_{21}+\psi_{22}$$

$$\psi_{21} = \left\{J_0(kcp_0)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m}(kcp_0)\cos 2m(\xi_\theta+\eta)\right\}J_0(kc\xi) \tag{16}$$

$$\psi_{22} = \sum_{m=1}^{\infty}F_m\cos\frac{2m-1}{2}\frac{\pi}{\eta_0}\eta. \tag{17}$$

と仮定し、境界条件(14)によって F_m を定むれば

$$F_m = \mp(-1)^{m+1}\frac{\eta_0}{\pi}\frac{8m}{2m-1}J_{2m}(kcp_0)J_0(kc\xi)\sin 2m(\xi_\theta\pm\eta_0). \tag{18}$$

しかるに、x軸上では $0<\eta<\pi/2$ と $-\pi/2<\eta<0$ の両領域の値が一致せねばならぬ。そのために

$$0<\eta<\pi/2, \qquad \psi_2 = \psi_{21}+\psi_{22}+\psi_{23}. \tag{19}$$

$$-\pi/2<\eta<0, \qquad \psi_2 = \psi_{21}+\psi_{22}-\psi_{23}. \tag{20}$$

なる関数を考え、x軸上で両領域の値が一致するように ψ_{23} を定むれば

$$\psi_{23} = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\eta_0}{\pi}\frac{8m}{2m-1}J_{2m}(kcp_0)J_0(kc\xi)\sin 2m\xi_\theta\cos 2m\eta_0\,\cos\frac{m\pi}{\eta_0}\eta. \tag{21}$$

を得る。