I-160　吊橋の立体解析（1）

浦賀重工業ＫＫ　正員　落合重俊
〃　〃　西島晃
〃　〃　○東　親佑

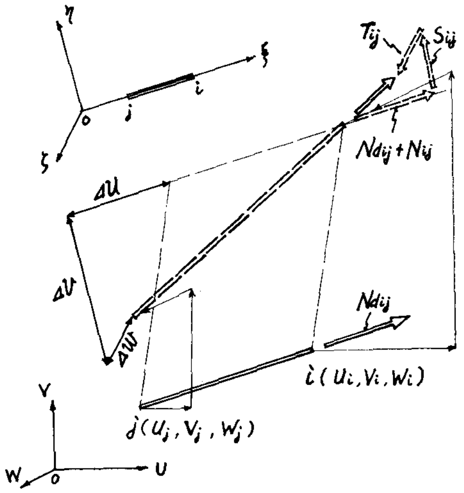
1　緒言　本研究は吊橋の一解法として平面的に用いられている軸力部材に関する有限変形法を立体的に拡張し、吊橋の部材を立体的骨組材と考え、任意の荷重状態に対する変形法の応用を行つたものである。有限変形理論については Saafan，Poskitt，等の論文があり、後藤茂夫氏は同様な問題を立体トラスに対して解析を行つている。

2　軸力部材の材端力と材端変位の関係

吊橋を構成する各部材の個々の変位量は微小であるが、全体の変形は本来の大きさに比して大きなものであるから、当然変形後の部材力に関するつり合式を立てなければならない。いま、吊橋の部材全体に共通な座標（U，V，W）と部材固有の座標（ξ，η，ζ）を下図のように表わす。

変形後の部材の材端力、$N_{(d+l)ij}$，を変形前の部材座標に関する分力，$N_{dij}+N_{ij}$，S_{ij}，T_{ij} の合力として表示できるものと考える。N_{ij}，S_{ij}，T_{ij} は変形によつて生ずる材端力の増分として仮定することも出来る。部材の伸び成分を、Δu，Δv，Δw とすれば、これ等変形後の材端力は、η，ζ 軸方向のひずみ成分がそれぞれの分力と軸方向力の比に等しいものと考えることによつて、次のような関係式で表わされる。

$$\left.\begin{aligned} N_{ij} &= \frac{\Delta u}{l_{ij}} EA_{ij}, \quad S_{ij} = \frac{\Delta v}{l_{ij}}(N_{dij}+N_{ij}) \\ T_{ij} &= \frac{\Delta w}{l_{ij}}(N_{dij}+N_{ij}) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (1)$$



図－1

また、共通座標と部材座標の間の方向余弦関係を次式で表現する。

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots (2)$$

共通座標に関する変位量を、x_i，y_i，z_i とし Δu，Δv，Δw を上式を使つて共通座標系に変換し、(1)式に代入して、さらに左辺の材端力を共通座標系に於ける材端力 X_{ij}，Y_{ij}，Z_{ij} に変換すれば、以下のような材端力と変位の関係式が得られる。

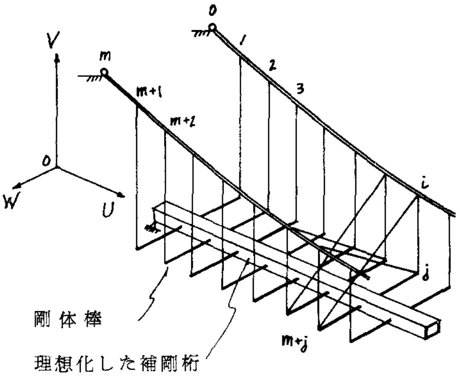
$$\left.\begin{aligned} X_{ij} &= (a_{ij}+a'_{ij}k_{ij})(x_i-x_j)+(d_{ij}+d'_{ij}k_{ij})(y_i-y_j)+(e_{ij}+e'_{ij}k_{ij})(z_i-z_j)-EA_{ij}\alpha_{ij}\varepsilon t \\ Y_{ij} &= (d_{ij}+d'_{ij}k_{ij})(x_i-x_j)+(b_{ij}+b'_{ij}k_{ij})(y_i-y_j)+(f_{ij}+f'_{ij}k_{ij})(z_i-z_j)-EA_{ij}\beta_{ij}\varepsilon t \\ Z_{ij} &= (e_{ij}+e'_{ij}k_{ij})(x_i-x_j)+(f_{ij}+f'_{ij}k_{ij})(y_i-y_j)+(c_{ij}+c'_{ij}k_{ij})(z_i-z_j)-EA_{ij}\gamma_{ij}\varepsilon t \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (3)$$

上式の a_{ij}，b_{ij} ……… f_{ij} 及び a'_{ij}，b'_{ij} ……… f'_{ij} は部材の物理的諸量と位置関係を与えれば、決定される定数項であり、例えば $d_{ij}=\frac{1}{l_{ij}}\cdot EA_{ij}\alpha\beta$，$d'_{ij}=\frac{1}{l_{ij}}\cdot EA_{ij}(\alpha'\beta'+\alpha''\beta')$ となる。

また、k_{ij} は $(Nd_{ij}+N_{ij})\cdot(1/EA_{ij})$ として表わされる無次元量であり、N_{ij} の値を仮定しなければならない。通常の変形法では $k_{ij}=0$ となる。

3. 吊橋への適用

今日のように電子計算機が実用化されるに従い、吊橋の吊形式を慣用の形にとどめる必要がなくなり、解析方法も平面的な膜構造としてとらえるだけでなく、立体的な変形を考えた解析方法が要求される。そこで、本解法に対する応用例として、従来の吊材以外に横断面上の空間を交差する吊材を新しく設けた構造形式を立案し、任意の載荷型式に対する解式の誘導を行つた。 右図の吊橋主ケーブル材 $\overline{i\sim i-1}$，鉛直吊材 $\overline{i\sim j}$，対角吊材 $\overline{i\sim m+j}$ に対して(1)式を適用すれば、任意点に集る部材々端力が変位の一次式で表示される。



図－2

主ケーブル上の節点 i に関する力のつり合を考えると $\sum X_i = X_{i,i-1}+X_{i,i+1}+X_{ij}+X_{i,m+j}=0$ となるが、この関係を $\sum Y_i=0$，$\sum Z_i=0$ についても同様に求めれば、主ケーブル全節点に関するつり合式は、主ケーブル上の格間を1階差分とする階差式による行列表示によつて次のような形で得られる。

$$\begin{bmatrix} a+bk & & d-dk & & & & & & \\ & a+\bar{b}k & & d-\bar{d}k & & & & & \\ d-dk & & b_1+ak & & f & & -b_2 & -b_3 & -f \\ & d-\bar{d}k & & \bar{b}_1+\bar{a}k & & \bar{f} & -\bar{b}_3 & -b_2 & -\bar{f} \\ & & f & & ak+bk+b_4k+C & & & -f & -b_4k-C \\ & & & \bar{f} & & \overline{ak}+\overline{bk}+\overline{b_4k}+\bar{C} & -\bar{f} & & -\overline{b_4k}-\bar{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \bar{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{y} \\ \bar{\boldsymbol{y}} \\ \boldsymbol{z} \\ \bar{\boldsymbol{z}} \\ \boldsymbol{y}' \\ \bar{\boldsymbol{y}}' \\ \boldsymbol{z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_t \\ \bar{U}_t \\ V_t \\ \bar{V}_t \\ W_t \\ \bar{W}_t \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots(4)$$

上式の左辺の係数行列中の各要素は(m－2)元の行列であり、それらの要素は $a_{ij}\cdots\cdots f_{ij}$，$a'_{ij}\cdots\cdots f'_{ij}$ 及び k_{ij} の加減乗除算によつて与えられる。バーを付した要素及びベクトルは、m+1～m－2の節点に対応する量である。右辺の項は温度項として与えられる。 また、$\boldsymbol{x},\cdots\cdots,\bar{\boldsymbol{z}}$ は主ケーブル節点上の変位ベクトルを表わし、$\boldsymbol{y}'$，$\bar{\boldsymbol{y}}'$，$\boldsymbol{z}'$ は補剛桁と吊材との交点における変位量を示すベクトルである。なお、本計算例に於いては補剛桁を橋面中心軸を通り、一様な曲げ剛性とねじり剛性を有する部材と見做し、吊材との結合は全て j 点と m+j 点を結ぶ剛体棒を想定した。さらに補剛桁上の節点の U 軸方向の変位を無視し、補剛桁が吊材の材端力とつり合うべき力の列ベクトルを、〔$\mathbf{Y}$，$\bar{\mathbf{Y}}$，$2\bar{\mathbf{Z}}$〕とすれば、補剛上節点に於けるV軸方向たわみ影響線行列の逆行列の対角要素行列を F_v それ以外の要素行列を D_v，W軸方向たわみ影響線行列の対角要素行列を h_w と表わすことによつて次の関係が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \bar{\mathbf{Y}} \\ 2\mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_v \\ \bar{P}_v \\ P_w+P_w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_v, & D_v, & \\ D_v, & F_v, & \\ & & h_w^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}' \\ \bar{\boldsymbol{y}}' \\ \boldsymbol{z}' \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots(5)$$

(5)式の左辺を吊材の材端力の合計に置き変えるために、吊材が補剛桁の材端力とつり合うべき力の

列ベクトルとして表示すれば

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \bar{\mathbf{Y}} \\ 2\mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_2, & -\bar{b}_3 & & -\bar{f} & \bar{B} & & \bar{f} \\ -b_3, & -b_2 & -f & & & B & f \\ -f, & -\bar{f}, & -b_4k-C, & -\bar{b}_4k-\bar{C}, & \bar{f}, & f, & b_4k+\bar{b}_4k+C+\bar{C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \bar{\mathbf{y}} \\ \mathbf{z} \\ \bar{\mathbf{z}} \\ \mathbf{y}' \\ \bar{\mathbf{y}}' \\ \mathbf{z}' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_t \\ \bar{R}_t \\ Q_t+\bar{Q}_t \end{bmatrix} \cdots\cdots (6)$$

上式中、右辺の第一項の係数行列の各要素は（ m － 2 ）元の　正方行列であり、それらの各要素は(4)式の場合と同じ性質のものである。(5)式を(6)式に代入すれば、補剛桁上の全節点に関するつり合式が得られる。

$$\begin{bmatrix} a+bk & & d-dk & & & & & & \\ & a+\bar{b}k & & d-\bar{d}k & & & & & \\ d-dk & & b_1+ak & & f & & -b_2 & -b_3 & f \\ & d-\bar{d}k & & \bar{b}_1+\bar{a}k & & \bar{f} & -\bar{b}_3 & -b_2 & \bar{f} \\ & & f & & ak+bk+b_4k+C & & & -f & -b_4k-C \\ & & & \bar{f} & & \bar{a}k+\bar{b}k+\bar{b}_4k+\bar{C}, & -\bar{f} & & -\bar{b}_4k-\bar{C} \\ & & -b_2 & -\bar{b}_3 & & -\bar{f} & \bar{B}+\mathbf{F}_v, & \mathbf{D}_v & \bar{f} \\ & & -b_3 & -b_2 & -f & & \mathbf{D}_v, & B+\mathbf{F}_v & f \\ & & -f & -\bar{f} & -b_4k-C & -\bar{b}_4k-\bar{C} & \bar{f} & f, & C+\bar{C}+b_4k+\bar{b}_4k+h_w^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{y} \\ \bar{\mathbf{y}} \\ \mathbf{z} \\ \bar{\mathbf{z}} \\ \mathbf{y}' \\ \bar{\mathbf{y}}' \\ \mathbf{z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_t \\ \bar{U}_t \\ V_t \\ \bar{V}_t \\ W_t \\ \bar{W}_t \\ \mathbf{P}_v+R_t \\ \bar{\mathbf{P}}_v+\bar{R}_t \\ \mathbf{P}_w+\bar{\mathbf{P}}_w+Q_t+\bar{Q}_t \end{bmatrix}$$

$$\cdots\cdots (7)$$

左辺の係数行列は正則行列であるから、右辺の任意の荷重ベクトルに対して変位解が与えられる。ただし、係数行列中のkを含む項は全て変形によつて生じる部材軸力の増分 N_{ij} を含むから、繰り返し計算しなければならない。このことは撓度理論に於ける $Melan$ の微分方程式に於いて、主ケーブルの水平力を仮定して線型化していることと同じである。n 回目の軸力の増分 $(N_{ij})_n$ は次式で与えられる。

$$(N_{ij})_n = \frac{EA_{ij}}{l_{ij}}\left[\alpha_{ij}\left\{(x_i)_{n-1}-(x_j)_{n-1}\right\}+\beta_{ij}\left\{(y_i)_{n-1}-(y_j)_{n-1}\right\}+\gamma_{ij}\left\{(z_i)_{n-1}-(z_j)_{n-1}\right\}\right] \cdots\cdots (8)$$

以下の数値計算例に於ては、大体 $n = 3 \sim 4$ 回の繰り返しで収束している。また、吊橋の計算に際しては、N_{ij} の値が負となつた場合、$Nd_{ij}+N_{ij}$ は必ずしも張力にならないで、負の値を示す場合が考えられるからそれに対応する部材を除いて計算を進めなくてはならない。

補剛桁断面に生ずる曲げモーメントは、補剛桁を橋面中心を通る 1 本の棒としているから、3 連モーメントの定理を適用し、格間を 1 階差分とする階差式による行列表示を行えば、次式(9)となる。

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{M}_w &= -\frac{3EI_w}{\lambda^2}(\mathbf{D}+6\mathbf{E})^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{y}'+\bar{\mathbf{y}}') \\ \mathbf{M}_v &= -\frac{6EI_v}{\lambda^2}(\mathbf{D}+6\mathbf{E})^{-1}\mathbf{D}\cdot\mathbf{z}' \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (9)$$

上式中の右辺に含まれる行列 $\mathbf{E}$ は単位行列である。行列 $\mathbf{D}$ は（ i , i ）要素が全て－2 ，（ $i-1$, i ）及び（ i, $i-1$ ）要素を 1 としそれ以外の要素が全て 0 となる行列である。

V 軸廻りのねじりモーメントについては、j 点と $m+j$ 点の V 方向材端力の差に補剛桁の全巾 b を掛ければ良い。

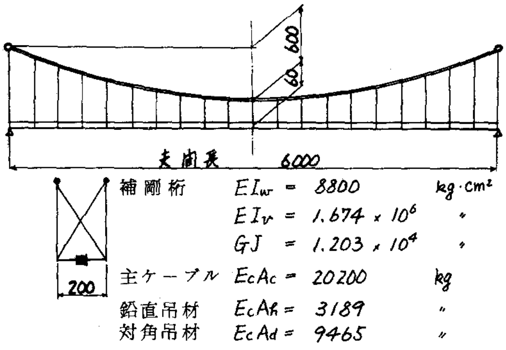
$$\mathbf{M}_u = b\left\{(\mathbf{P}_v-\bar{\mathbf{P}}_v)+(\mathbf{D}_v-\mathbf{F}_v)(\mathbf{y}'-\bar{\mathbf{y}}')\right\} \cdots\cdots (10)$$

以上の関係式を電子計算のためにプログラム化し、以下の数値計算例に対して解を求めた。

4. 数値計算例

右図のようなモデル諸元について、計算を行つた。鉛直撓みに対する撓度理論との比較を行う為、Timoshenko の三角級数法によつて既往の理論値を求めたが、全載荷の場合で最大撓みが4％程度の差が生じた。この差は主に格間の数によるものと考えられる（表－1）なお、補剛桁の曲げモーメントについても試算したが2％程度の誤差であつた。また、水平横荷重全載荷の場合の水平撓みについて、L.S. Moisseiff の弾性分配法による値との比較を行えば、補剛桁、主ケーブル共に差は0.2％以下であり、殆んど一致した。（表－2）次に本解法に依る計算が特に有効な構造型式として、対角ステイを支間 $\ell/4$, $3\ell/4$ 点に配置し、鉛直荷重を橋面上に逆対称載荷させた場合の補剛桁の鉛直変位を計算した。

図－4は対角ステイの有無による撓み差を示すものであるが、対角ステイは補剛桁のねじり変形を可なり拘束することが判明出来る。ただし、対角ステイの数を多くしても、全体の変形にそれ程大きな変化は生じなかつた。



図－3

		本理論	撓度理論
鉛直変位	全載・最大	20.66mm	19.86mm
	半載・〃	34.26〃	32.87〃
	〃・倍振巾	52.68〃	54.48〃
水平張力	全載	33.37kg	33.61kg
	半載	17.22〃	17.46〃

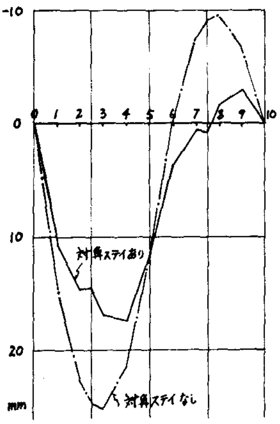
表－1 撓度理論との比較

格点	本理論	弾性分配法
0.1ℓ	0.1276	0.1296
0.2ℓ	0.3308	0.3342
0.3ℓ	0.6294	0.6308
0.4ℓ	1.0426	1.0290
0.5ℓ	1.3310	1.2968

表－2 弾性分配法との比較

5. 結語

吊橋を骨組部材の集合体として取扱い、変形後の状態で行列表示することによつて線型化された弾性方程式を立て、部材張力の繰り返し計算によつてその有限変位を求め、撓度理論との対応が可能となつた。さらに、鉛直荷重と水平横荷重を組合わせた場合の計算も可能となつたが、その詳細は講演時に報告したい。



図－4 逆対称載荷による補剛桁の鉛直撓み

（参考文献）
(1) 大地洋三著「電子計算機による構造解析」
(2) 倉西　茂著「行列による吊橋の解析」
(3) 後藤茂夫著「不規則吊材を有する吊橋の解法」