

プログラミングに適した斜張橋の一般式

大阪大学工学部 正員 前田 幸雄

大阪大学工学部 正員 〇林 正

1. まえがき 斜張橋には、その形態からわかるように数多くの形式が存在する。すなわち、斜張橋の有する塔及びケーブルの配置の仕方や結合方法及び多様な主桁の構造形式を加えると、斜張橋は多量の形式に分類できる。一般に、一形式の斜張橋の構造解析及びそのプログラミングを行うことは容易なことであるが、上述の如き種々の斜張橋の解析のための汎用プログラムを作成することは極めて困難なことである。そのため、計算式があらゆる形式に適用できるように一般化されているとともに、できるだけ簡単な形で表わされていることが望ましい。そこで、斜張橋の一般化した計算式を簡便な形で表現するために、通常は変断面桁が用いられる塔と種々の形式が存在する主桁とに属する計算式を本来の斜張橋の計算式から切り離した。すなわち、塔と主桁を部分構造物と考え、プログラミングにおいてはそれらの計算式をサブルーチンの形で用いられるようにした。このことは、また計算機の記憶容量と計算時間を少なくするであろう。特に、構造形式の定った主桁について、塔やケーブルの幾何学的形状と剛性を変えて比較設計を行う場合には、本文の方法によれば計算時間はかなり短縮される。また、塔上でケーブルの支持形式を変える場合には、計算を最初からやり直す必要がなく一度求めた係数行列と荷重項に変換行列を掛けるだけで所要の方程式が得られる。

本文では、斜張橋の静的な構造解析のための汎用プログラムが作成し易いように、その計算式を行列形式で表した。さらに、汎用プログラム一例をフローチャートの基本的な形で示しておいた。なお、計算式は参考文献⁽¹⁾の式を拡張したものであり、文献⁽²⁾の式とも一部異なるところがあるがそのような式はあらためて記述した。また、記号も一部変更したので、注意されたい。

2. 構造条件 本文で扱う

表-1 基本単位形式

斜張橋の構造条件、すなわち

(1) 構造形式

(2) 基本単位形式

(3) 解析上の基本系

は参考文献⁽²⁾と同じであるが

(4) 解析上の仮定

では、軸力による塔の伸縮を考慮した。本文でも、文献⁽²⁾の表-2の如き変形基本単位形式は考えられる。

Bottom End to Tower		Hinged		Fixed	
Cable Support on Tow.		Fixed	Sliding	Fixed	Sliding
Degree of Girder Connected to Tower	0 (A-Type)				
	1st (A-Type)				
	2nd (B-Type)				
	3rd (B-Type)				

3. 基礎方程式

基礎方程式も文献⁽²⁾の各式と同じであるが、解析において塔の伸縮を考慮したので、文献⁽²⁾の塔の変形を表わす式(6)~(9)の代りに次式(a), (b)を用いる。ただし、A-Typeでは式(a)の右辺第3項を、A₃, A₄-Type及びA₃, A₄-Typeではさらに第2項を省略するものとする。

$$A, \bar{A}\text{-Type:} \begin{cases} dL_i = -\sum_{k=1}^m H'_{jk} X_k + h_j \bar{\Phi}_t - \sin \omega_t \cos \omega_k (\mu_{jt} - f_{jt}) \bar{R}_t & (a)_1 \\ dD_i = -\sum_{k=1}^m K'_{jk} X_k + h_j \bar{\Phi}_t \cot \omega_t - (\mu_{jt} \cos \omega_t + f_{jt} \sin \omega_t) \bar{R}_t & (a)_2 \end{cases}$$

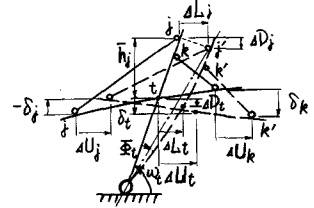
図-1 A1-Type の変形様式

$$B, \bar{B}\text{-Type:} \begin{cases} dL_i = -\sum_{k=1}^m H'_{jk} X_k + dU_t + \bar{h}_j \theta'_t & (b)_1 \\ dD_i = -\sum_{k=1}^m K'_{jk} X_k + \delta_t + \bar{h}_j \theta'_t \cot \omega_t & (b)_2 \end{cases}$$

ここに,

$$H'_{jk} = \mu_{jk} \sin \omega_t \sin (\omega_t - \alpha_k) + f_{jk} \cos \omega_t \cos (\omega_t - \alpha_k) \quad (c)_1$$

$$K'_{jk} = \mu_{jk} \cos \omega_t \sin (\omega_t - \alpha_k) - f_{jk} \sin \omega_t \cos (\omega_t - \alpha_k) \quad (c)_2$$



μ_{jk} : 単一化された塔の重心軸に直角な向きで格点 k に作用する単位集中荷重による格点 j の挠み

f_{jk} : 単一化された塔の重心軸に平行な向きで格点 k に作用する単位集中荷重による格点 j の伸び

4. 弾性方程式 全ての基本単位形式に対する一般化された弾性方程式は、次式(d), (e), (f)で表わされる。式(d)は固定支持された第 j ケーブルに対して成立し、式(e)及び(f)はそれぞれ $\bar{A}$ -Type 及び A_1 と $\bar{A}_1$ -Type の第 t 塔に対して成立する。各形式により省略すべき項は、文献²⁾と同じである。

$$F_j V_j + \sum_{k=1}^m G_{jk} V_k + \sum_{k=1}^m H_{jk} V_k - \sum_{i=1}^n D_{ji} \bar{R}_i - \sum_{i=1}^n (C_{ip} S_p + D_{ip} R_p + E'_{ip} M_p) + K_{jt} \bar{R}_t - L_j \bar{\Phi}_t = D_{jo} \quad (j \in t) \quad (d)$$

$$\sum_{i=1}^n Y_{ti} V_i - \sum_{k=1}^m K_{tk} V_k - \sum_{i=1}^n \gamma_{ti} \bar{R}_i - \sum_{i=1}^n (\xi_{tp} S_p + \gamma_{tp} R_p + \zeta'_{tp} M_p) - K_{tt} \bar{R}_t + L_t \bar{\Phi}_t = \delta_{to} \quad (t: \bar{A}\text{-Type}) \quad (e)$$

ここに、基本単位形式に応じて

$$\sum_{k=1}^m L_{tk} V_k + L_t \bar{R}_t = 0 \quad (t: A_1 \text{ or } \bar{A}_1\text{-Type}) \quad (f)$$

$A, \bar{A}\text{-Type:}$

$B, \bar{B}\text{-Type:}$

さらに,

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{jp} = \xi_{jp} - u_{jp} \cot \alpha_j \\ D_{jp} = \gamma_{jp} - v_{jp} \cot \alpha_j \\ E'_{jp} = \zeta'_{jp} - w'_{jp} \cot \alpha_j \\ D_{jo} = \delta_{jo} - u_{jo} \cot \alpha_j \\ G_{ji} = Y_{ji} - X_{ji} \cot \alpha_j \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} C_{jp} = (\xi_{jp} - \xi_{tp}) - (u_{jp} - u_{tp}) \cot \alpha_j + \bar{L}_j \gamma'_{tp} \\ D_{jp} = (\gamma_{jp} - \gamma_{tp}) - (v_{jp} - v_{tp}) \cot \alpha_j + \bar{L}_j \phi'_{tp} \\ E'_{jp} = (\zeta'_{jp} - \zeta'_{tp}) - (w'_{jp} - w'_{tp}) \cot \alpha_j + \bar{L}_j \psi'_{tp} \\ D_{jo} = (\delta_{jo} - \delta_{to}) - (u_{jo} - u_{to}) \cot \alpha_j + \bar{L}_j \theta'_{to} \\ G_{ji} = (Y_{ji} - Y_{ti}) - (X_{ji} - X_{ti}) \cot \alpha_j + \bar{L}_j Z'_{ti} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} X_{ji} = v_{ji} + (e_i w_{ji} - u_{ji}) \cot \alpha_i \\ Y_{ji} = \gamma_{ji} + (e_i \zeta_{ji} - z_{ji}) \cot \alpha_i \\ Z'_{ti} = \phi'_{ti} + (e_i \psi'_{ti} - \delta'_{ti}) \cot \alpha_i \end{array} \right\} \quad (g)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_j = f_j / \sin \alpha_j \\ L_j = h_j (\cot \alpha_j - \cot \omega_t) \\ \bar{L}_j = \bar{h}_j (\cot \alpha_j - \cot \omega_t) \\ L_t = h_t \cot \omega_t \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} H_{jk} = \sin \omega_t \{ \mu_{jk} (\cot \alpha_j - \cot \omega_t) (\cot \alpha_k - \cot \omega_t) + f_{jk} (1 + \cot \alpha_j \cot \omega_t) (1 + \cot \alpha_k \cot \omega_t) \} \\ K_{jt} = \sin \omega_t \{ \mu_{jt} \cos \omega_t (\cot \alpha_j - \cot \omega_t) - f_{jt} \sin \omega_t (1 + \cot \alpha_j \cot \omega_t) \} \\ K_{tk} = \sin \omega_t \{ \mu_{tk} \cos \omega_t (\cot \alpha_k - \cot \omega_t) - f_{tk} \sin \omega_t (1 + \cot \alpha_k \cot \omega_t) \} \\ K_{tt} = \mu_{tt} \cos^2 \omega_t + f_{tt} \sin^2 \omega_t \end{array} \right\}$$

5. 一般公式 式(d), (e), (f)で表わされる弾性方程式の一般式を行列形式に変換すると、複雑な構造を有する斜張橋に対してもその計算式が簡便な形で表示でき、特に電子計算機を使用する場合に便利である。一般化された弾性方程式を式(1)、または小行列を用いて式(2)のように表わす。

$$\Gamma X = \Delta \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} A_{nn} & \bar{A}_{nr} & B_{nr'} \\ \bar{A}_{rn} & C_{rr} & \bar{B}_{rr'} \\ B_{r'n} & \bar{B}_{r'r} & O_{r'r'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n \\ \bar{R}_r \\ \Phi_{r'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_n \\ \bar{D}_r \\ O_{r'} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここに、添字 n, r, r' は斜張橋の有するケーブルの本数、 $\bar{A}$ -Type の塔の数及び A_1 と $\bar{A}_1$ -Type の塔の数であり、同時に小行列の次数を表わしている。例へば、 $\bar{A}_{nr}$ は小行列 $\bar{A}$ が (n, r) -行列であり、 V_n は n 次の列ベクトルであることを示す。また、右肩の添字 r は転置行列を表わし、記号 $*$ は特別な場合に転置行列になることを意味するものとする、各小行列間には次式の如き関係が成立する。

$$\bar{A}_{rn} = \bar{A}_{nr}^*, \quad B_{r'n} = B_{nr'}^T, \quad \bar{B}_{r'r} = \bar{B}_{rr'}^T \quad (3)$$

行列 O は零行列を表わす。結局、係数行列 Γ は $(n+r+r') = N$ 次の正方行列となり、一般には非対称行列である。その組立て方は、第1行目から第 n 行目まではケーブルに関する式(d)を、第 $(n+1)$ 行

目から第 $(n+r)$ 行目までは $\bar{A}$ -Typeの塔に関する式(e)を、第 $(n+r+1)$ 行目以下は A_1 と $\bar{A}_1$ -Typeの塔に関する式(f)を配列したものである。したがって、式(2)は $\bar{A}$ -Typeの塔が存在しない場合には式(2)'のようになり、さらに A_1, A_2 -Typeの塔も存在しない場合には式(2)''のように簡単になる。

$$\begin{bmatrix} A_{nn} & B_{nr'} \\ B_{r'n} & O_{r'r'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n \\ \Phi_{r'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_n \\ O_{r'} \end{bmatrix} \quad (2)' \quad A_{nn} V_n = D_n \quad (2)''$$

式(2)を要素で表わすと、式(4)のようになる。

$$\begin{array}{l} \text{ケーブル} \\ [E_g(d)] \end{array} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ i \\ n \end{array} \right\} \begin{array}{c} i \\ \left[\begin{array}{c|c|c} [a_{ji}] & [\bar{a}_{jp'}] & [b_{jg'}] \end{array} \right] \end{array} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ p' \\ r' \end{array} \right\} \begin{array}{c} p' \\ \left[\begin{array}{c|c|c} (V_i) \\ (\bar{R}_p) \\ (\Phi_g) \end{array} \right] \end{array} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ g' \\ r' \end{array} \right\} \begin{array}{c} g' \\ \left[\begin{array}{c|c|c} (d_j) \\ (\bar{d}_p) \\ (0) \end{array} \right] \end{array} \quad (4)$$

ここに、第 i, j ケーブルは、それぞれ第 t' 、 t 塔に属するものとする。 $(i, j = 1, 2, \dots, n)$

第 p, p' 塔は、 $\bar{A}$ -Typeの塔とする。 $(p, p' = 1, 2, \dots, r)$

第 g, g' 塔は、 A_1 または $\bar{A}_1$ -Typeの塔とする。 $(g, g' = 1, 2, \dots, r')$

さて、式(4)の各要素は第 t 塔の形式に応じた式(9)の係数を用いて、次のようになる。

$$a_{ji} = \begin{cases} G_{ji} + H_{ji} + C_{ji} \cot \alpha_i - D_{jt}' + \bar{L}_i E_{jt}' & (t' = t \text{ and } t': \text{Bor } \bar{B}\text{-Type}) \\ G_{ji} + H_{ji} & (t' = t \text{ and } t': \text{Aor } \bar{A}\text{-Type}) \\ G_{ji} + C_{ji} \cot \alpha_i - D_{jt}' + \bar{L}_i E_{jt}' & (t' \neq t \text{ and } t': \text{Bor } \bar{B}\text{-Type}) \\ G_{ji} & (t' \neq t \text{ and } t': \text{Aor } \bar{A}\text{-Type}) \end{cases}$$

さらに、 $i = j$ (and $t' = t$) ならば上式の a_{ji} に F_j の項を加える。

$$\bar{a}_{jp'} = \begin{cases} -Y_{pi} + K_{pi} & (t' = p) \\ -Y_{pi} - \sum_{p'} \cot \alpha_i + \gamma_{pt}' - \sum_{p'} \bar{L}_i & (t' \neq p \text{ and } t': \text{Bor } \bar{B}\text{-Type}) \\ -Y_{pi} & (t' \neq p \text{ and } t': \text{Aor } \bar{A}\text{-Type}) \end{cases} \quad \bar{a}_{jp'} = \begin{cases} -D_{jt} + K_{jt} & (t = p') \\ -D_{jp'} & (t \neq p') \end{cases}$$

$$b_{jg'} = \begin{cases} -L_i & (t = g') \\ 0 & (t \neq g') \end{cases} \quad b_{ji} = \begin{cases} -L_i & (t' = g) \\ 0 & (t' \neq g) \end{cases} \quad \bar{b}_{pg'} = \begin{cases} -L_p & (g' = p) \\ 0 & (g' \neq p) \end{cases} \quad \bar{b}_{gp'} = \begin{cases} -L_g & (p' = g) \\ 0 & (p' \neq g) \end{cases}$$

$$C_{pp'} = \begin{cases} \gamma_{pp} + K_{pp} & (p' = p) \\ \gamma_{pp'} & (p' \neq p) \end{cases} \quad d_j = \begin{cases} (\delta_{jo} - \delta_{co}) - (u_{jo} - u_{co}) \cot \alpha_j + \bar{L}_j \theta'_{co} & (t: \text{Bor } \bar{B}\text{-Type}) \\ \delta_{jo} - u_{jo} \cot \alpha_j & (t: \text{Aor } \bar{A}\text{-Type}) \end{cases} \quad \bar{d}_p = -\delta_{po}$$

式(9),(5)において、影響値にdashを付けた記号 θ'_{co} etc. は、基本系における塔の格点 t の値を示す。

式(2)及び(4)は、全ケーブルが塔上で固定支持された場合に適用できるが、滑動支持されたケーブルが存在する場合には、以下に説明するような変換行列を係数行列と荷重ベクトルに乗ずればよい。

今、第 j と第 k ケーブルとが連続していて、塔上で滑動支持されているとする。この2本のケーブルの傾斜角 α_j, α_k を用いて、 t_{kj} を次式のように定める。

$$t_{kj} = \sin \alpha_k / \sin \alpha_j \quad (6)$$

次に、 N 次元単位行列の第 k 行の対角要素1を t_{kj} に置き換えた式(7)の如き対角行列 Π_0 を考える。変換行列には、Left-Transformation Matrix と Right-Transformation Matrixがあるが、それらを各々 T_L と T_R で表わすことにする。まず、 T_L は Π_0 の第 k 行の要素を第 j 行に加え、かつ第 k 行を省略して、

($N-1, N$)-行列としたものであり, T_0 は T_0 の第 k 列の要素を第 j 列に加え, かつ第 k 列を省略して($N, N-1$)-行列としたものである。すなわち, T_1 は T_0 の転置行列であり, 式(8)ようになる。

$$T_0 = \begin{matrix} & & k \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} t_{ki} \\ \vdots \\ t_{ki} \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (7)$$

$$T_1 - T_0^T = \begin{matrix} & & k & N \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} t_{ki} \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{matrix} \quad (8)$$

も, 式(6)で t_{jk} を用いれば, 式(7), (8)において j と k を入れ換えればよい。また, 滑動支持されたケーブルが複数(例えば M 本)ある場合にも上述と同じ方法にて, ($N-M, N$)-行列の T_1 と($N, N-M$)-行列の T_0 を作るものとする。このとき, n 次のベクトル V_n を($n-M$)次元にて, 式(1)は

$$(T_1 T_0^T) X - T_1 \Delta \quad (9)$$

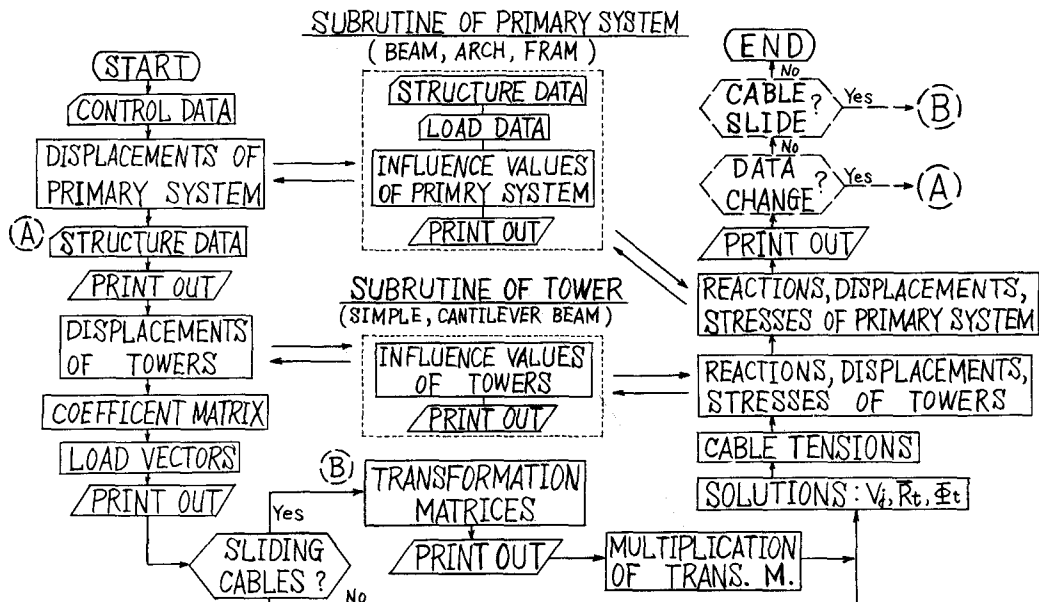
と, より一般化される。また, 式(9)とは独立に t_{kj} のみを要素とする M 次の対角行列 T_{kj} を用いて

$$V_k - T_{kj} V_j \quad (10)$$

が成立する。ここに, V_k, V_j は M 次の列ベクトルで対応する要素は連続したケーブルに属する値である。

6. 流れ図 任意な形状の斜張橋の解析のための汎用プログラムの概略の流れ図を示した。実際の橋梁では, 基本主桁及び塔には変断面材が用いられるであろうし, 特に主桁には種々の形式が採用されるので, 各形式に応じた既製の専用プログラムをサブルーチンとして組み込めば便利である。流れ図において, 破線で示した部分は比較設計を行う場合に用いるものである。

図-2 斜張橋の汎用プログラム作成のための流れ図



7. おすび 本文で示した流れ図は概略的なものであり, 詳細な部分についてはまだ改良の余地が残されているので, 後日に完成を期したい。

- 1) 前田・林: 任意な形状の斜張橋の解析, 土木学会論文集, 第160号, 昭和43年12月
- 2) 前田・林・平野: 傾斜した塔を有する斜張橋について, 周面支部講演会講演概要, 昭和44年5月