

九州大学工学部 正 員 山崎徳也
 〃 〃 正 員 彦坂 照
 〃 〃 学生員 ○羽根悟朗

1. 緒言

プレキャストPC桁と現場打コンクリートスラブとを結合したPC合成桁は、断面の有効利用とそれに伴う断面の減少により極めて経済性の高い構造型式であり、近年多くの施工例を見るようになった。その設計計算は通常単一のT形断面桁として取り扱われているが、これをスラブと主桁を一体として解析すれば、横方向荷重分配と部材の捩り剛性が考慮されるゆえ、より厳密かつ経済的設計が可能となることは当然であり、これに関しては既にGuyon-Massonnetの理論が有名である。しかしながら本題のPC合成桁では、プレキャストPC桁に予めプレストレスが導入されており、Guyon-Massonnetの理論をそのまま用いることは適当でない。本研究はかかる見地から、PC合成桁についてプレストレスの効果およびプレキャスト部と現場打部のコンクリートの弾性係数の相違を考慮し、実際構造に適用可能な直交異方性板理論を誘導のうえ、既往理論との比較検討を行わんとするものである。なお、コンクリートのクリープの影響は別途考慮することとし、本論ではひとまず無視する。

2. 曲げの基礎微分方程式の誘導

図-1のごとく橋長 a 、幅員 b の等断面PC合成桁橋を考え、コンクリートスラブの厚さの中央面内でそれぞれ橋長、幅員方向に直交軸 x 、 y を、さらにこれらに垂直下方に z 軸を設ける。スラブの厚さを t 、プレキャストPC桁は x 軸に平行に配置されているものとしてその高さを h とし、スラブの単位幅当りのPC桁の断面積を A_p とすれば、 y 方向の単位幅についての置換断面が図-2で表わされる。ここに r_s はス

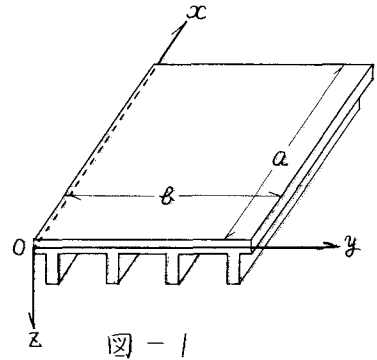


図-1

ラブの図心、 r_p はPC桁の図心、 r はスラブとPC桁の弾性係数比 E_s/E_p を用いてスラブの断面積をPC桁のそれに置換してえられる等置断面の図心であり、 a_s は r と r_s の距離、 a_p は r_s と r_p の距離を示す。

A. プレキャストPC桁の変形

はじめに、コンクリートスラブ打設前におけるプレキャストPC桁のみの変形を考える。図-3のごとく、PC桁は r_p より下方 f の位置に軸方向圧縮力 P を受けると理想化して取り扱い、断面の中立軸と r_p の距離を $\bar{a}_p$ 、桁の z 方向のたわみを w とすれば、平面保持の仮定のもとに、任意

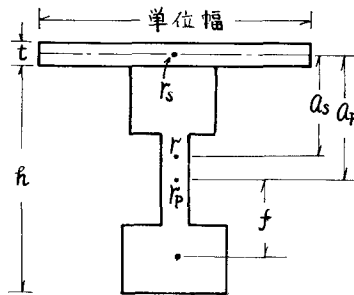


図-2

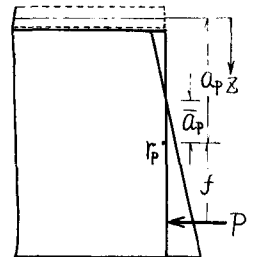


図-3

点のひずみ $\bar{\epsilon}_{px}$ が次式で表わされる。

$$\bar{\epsilon}_{px} = (a_p - \bar{a}_p - z) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\text{ただし、} \quad \bar{a}_p = \frac{\bar{I}_p - f \bar{G}_p}{A_p f - \bar{G}_p}, \quad \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = \frac{P}{E_p (\bar{a}_p A_p + \bar{G}_p)}$$

$$\text{ここに} \quad \bar{I}_p = \int_{A_p} (z - a_p)^2 dz, \quad \bar{G}_p = \int_{A_p} (z - a_p) dz$$

B. PC合成桁の応力-ひずみ関係式

次に、PC桁とコンクリートスラブを結合したPC合成桁のz方向のたわみを w とすれば、同じく平面保持の仮定を用いることにより、スラブの x , y 方向のひずみ ϵ_{sx} , ϵ_{sy} およびせん断ひずみ γ_{sxy} がそれぞれ次式で表わされる。

$$\epsilon_{sx} = (a_s - z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_{sy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{sxy} = (a_s - z) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

また、PC桁の x 方向ひずみ ϵ_{px} は式(1)の初期ひずみを考慮して次式で表わされる。

$$\epsilon_{px} = (a_s - z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (a_p - \bar{a}_p - z) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \quad (3)$$

式(2), (3)の各ひずみ成分に対応するスラブおよびPC桁の応力を σ_{sx} , σ_{sy} , τ_{sxy} および σ_{px} とすれば、次の応力-ひずみ関係式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{sx} &= \frac{E_s}{1-\nu^2} (\epsilon_{sx} + \nu \epsilon_{sy}) = \frac{E_s}{1-\nu^2} \left\{ (a_s - z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \\ \sigma_{sy} &= \frac{E_s}{1-\nu^2} (\epsilon_{sy} + \nu \epsilon_{sx}) = \frac{E_s}{1-\nu^2} \left\{ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (a_s - z) \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \\ \tau_{sxy} &= \frac{E_s}{2(1+\nu)} \gamma_{sxy} = \frac{E_s}{1+\nu} \left(\frac{a_s}{2} - z \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\sigma_{px} = E_p \epsilon_{px} = E_p \left\{ (a_s - z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (a_p - \bar{a}_p - z) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right\} \quad (5)$$

ただし ν はコンクリートのポアソン比

C. 基礎微分方程式

式(4), (5)を用いて基準面 $z=0$ に関するモーメントの釣合条件式を立てれば、 x および y 軸に垂直な単位幅当りの曲げモーメント M_x , M_y がそれぞれ次式のごとく求められる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{A_p} \sigma_{px} z dA_p + \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{sx} z dz = -(D_p + D_s) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu D_s \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \bar{D}_p \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \\ M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{sy} z dz = -D_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\text{ここに} \quad D_s = \frac{E_s t^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_p = E_p \int_{A_p} z(z - a_s) dz, \quad \bar{D}_p = E_p \int_{A_p} z(z + \bar{a}_p - a_p) dz$$

次に、PC桁に対し St. Venant の捩り理論を用いれば、 x および y 軸に垂直な単位幅当りの捩りモーメントが次式でえられる。

$$\left. \begin{aligned} M_{xy} &= GJ_p \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{sxy} z \, dz = \left\{ GJ_p + (1-\nu)D_s \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ M_{yx} &= -(1-\nu)D_s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに、 GJ_p は単位幅当りの PC 桁の捩り剛度である。

z 方向の断面力と荷重強度 $g(x, y)$ の釣合条件式

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} = -g(x, y)$$

に式(6)、(7)を代入すれば PC 合成桁橋のたわみ曲面 w の基礎微分方程式が導かれ、途中の演算を省略して結果のみを示せば次のごとくである。

$$\beta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\beta_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = g(x, y) \quad (8)$$

$$\text{ここに、} \quad \beta_1 = D_p + D_s, \quad \beta_2 = D_s, \quad \beta_3 = \frac{1}{2} GJ_p + D_s$$

3. 一般解法

ここに取り扱う図-1 の合成桁橋は $x=0$ および $x=a$ において単純支持されるものとする。その境界条件が次式で与えられる。

$$x=0, a \text{ において } w=0, \quad M_x - M_0 = 0 \quad (9)$$

ここに、 M_0 は軸方向圧縮力 P によりプレキャスト PC 桁が受ける単位幅当りのモーメント。式(9)を満足する式(8)の一般解は次式のごとく求められる。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi}{a} x + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (10)$$

$$\text{ここに } a_{mn} = \frac{g_{mn}}{\pi^4 \left\{ \frac{m^4}{a^4} \beta_1 + \frac{n^4}{b^4} \beta_2 + 2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} \beta_3 \right\}} \quad (g_{mn} \text{ は } g(x, y) \text{ の二重正弦フーリエ級数への展開係数})$$

$$b_m = \frac{4a^2}{m^3 \pi^3} \frac{M_0 + D_p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{D_p + D_s} \quad (m=1, 3, 5, \dots)$$

また、 γ_m は y のみの関数で、 $\beta_3^2 - \beta_1 \beta_2$ の正負により次のごとく異なる式型をとる。

(i) $\beta_3^2 - \beta_1 \beta_2 < 0$ のとき

$$\begin{aligned} \gamma_m &= A_m \cosh k_1 \frac{m\pi}{a} y \cosh k_2 \frac{m\pi}{a} y + B_m \sinh k_1 \frac{m\pi}{a} y \cosh k_2 \frac{m\pi}{a} y \\ &\quad + C_m \cosh k_1 \frac{m\pi}{a} y \sinh k_2 \frac{m\pi}{a} y + D_m \sinh k_1 \frac{m\pi}{a} y \sinh k_2 \frac{m\pi}{a} y \end{aligned} \quad (11)$$

(ii) $\beta_3^2 - \beta_1 \beta_2 = 0$ のとき

$$\gamma_m = A_m \cosh \bar{k}_1 \frac{m\pi}{a} y + B_m \sinh \bar{k}_1 \frac{m\pi}{a} y + C_m y \cosh \bar{k}_1 \frac{m\pi}{a} y + D_m y \sinh \bar{k}_1 \frac{m\pi}{a} y$$

(iii) $\beta_3^2 - \beta_1\beta_2 > 0$ のとき

$$Y_m = A_m \cosh \bar{k}_1 \frac{m\pi}{a} y + B_m \sinh \bar{k}_1 \frac{m\pi}{a} y + C_m \cosh \bar{k}_2 \frac{m\pi}{a} y + D_m \sinh \bar{k}_2 \frac{m\pi}{a} y$$

$$\text{ただし } k_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\beta_1} + \frac{\beta_2}{\beta_1})}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\beta_1} - \frac{\beta_2}{\beta_1})}, \quad \bar{k}_1 = \sqrt{\frac{\beta_3}{\beta_2} + \sqrt{\frac{\beta_3^2 - \beta_1\beta_2}{\beta_2^2}}}, \quad \bar{k}_2 = \sqrt{\frac{\beta_3}{\beta_2} - \sqrt{\frac{\beta_3^2 - \beta_1\beta_2}{\beta_2^2}}}$$

A_m, B_m, C_m, D_m は $y = 0$ の境界条件より定まる積分定数

与えられる荷重に対し上記の積分定数を決定のうえ、式(10)を式(4)、(5)に代入すれば、スラブおよびPC桁の任意点における応力がすべて求められる。例としてここでは q_0 なる満載等分布荷重を受ける場合の積分定数の算定結果を示すこととする。ただし、 x 方向に比して y 方向の剛性が著しく小さい通常のPC合成桁においては常に $\beta_3^2 - \beta_1\beta_2 < 0$ が成立するゆえ、式(10)の Y_m としては式(11)のみを考慮すればよい。

構造の対称性を考慮して座標軸を図-4のごとくとれば、式(10)は簡単な次式となる。

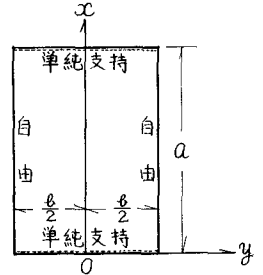


図-4

$$w = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{4q_0 a^4}{\pi^5 \beta_1 m^5} + b_m + A_m \cosh k_1 \frac{m\pi}{a} y \cosh k_2 \frac{m\pi}{a} y + D_m \sinh k_1 \frac{m\pi}{a} y \sinh k_2 \frac{m\pi}{a} y \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (12)$$

自由辺 $y = \pm b/2$ における境界条件式

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{および} \quad D_s \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \{GJ_p + D_s(2-\nu)\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

に式(12)を代入すれば A_m および D_m に関する方程式がえられ、これを解いて次の結果をうる。

$$A_m = \left(\frac{4q_0 a^4}{\pi^5 \beta_1 m^5} + b_m \right) \nu \frac{g_4}{g_1 g_4 - g_2 g_3}, \quad D_m = - \left(\frac{4q_0 a^4}{\pi^5 \beta_1 m^5} + b_m \right) \nu \frac{g_3}{g_1 g_4 - g_2 g_3}$$

$$\text{ここに、} g_1 = (k_1^2 - k_2^2 - \nu) \cosh k_1 \alpha_m \cosh k_2 \alpha_m - 2k_1 k_2 \sinh k_1 \alpha_m \sinh k_2 \alpha_m,$$

$$g_2 = (k_1^2 - k_2^2 - \nu) \sinh k_1 \alpha_m \sinh k_2 \alpha_m + 2k_1 k_2 \cosh k_1 \alpha_m \cosh k_2 \alpha_m,$$

$$g_3 = k_1 \{D_s(k_1^2 - 3k_2^2 - 2 + \nu) - GJ_p\} \sinh k_1 \alpha_m \cosh k_2 \alpha_m + k_2 \{D_s(k_2^2 - 3k_1^2 + 2 - \nu) + GJ_p\} \cosh k_1 \alpha_m \sinh k_2 \alpha_m$$

$$g_4 = k_1 \{D_s(k_1^2 - 3k_2^2 - 2 + \nu) - GJ_p\} \cosh k_1 \alpha_m \sinh k_2 \alpha_m - k_2 \{D_s(k_2^2 - 3k_1^2 + 2 - \nu) + GJ_p\} \sinh k_1 \alpha_m \cosh k_2 \alpha_m$$

4. 数値計算 紙面の都合上省略し、講演当日発表する。

5. 結語

本研究は、主桁に予めプレストレスが導入されるPC合成桁の解析に通常の直交異方性板理論を適用することの不合理を改善し、プレストレスの効果を考慮した新たな直交異方性板理論を誘導のうえ、その一般的解法を提示したものである。本論では触れなかったが、PC合成桁はコンクリートのフープおよび乾燥収縮の影響を強く受けるゆえ、設計時にはこれらの厳密な考慮を必要とし、その効果を含めた一般理論と考察について逐次報告の予定である。