

北海道大学工学部 正員 渡 辺 昇

北海道大学工学部 正員 ○ 薄 木 征 三

北海道大学工学部 正員 佐 藤 浩 一

1. ま え が き

平面内において S 字形をなす曲線桁橋、すなわち、S 字の両端の橋台位置では曲げに対して単純支持でねじりに対して抵抗をもち、S 字の中間には何ら橋脚をもたないような曲線桁橋について、その断面力の影響線および等分布荷重満載の場合の断面力図を求める理論式を導いた。

この S 字形曲線桁の理論解析では、まず S 字形曲線静定単純桁の解析を行ない、次いでこれを基本系として、一次の不静定力を挿入して S 字形曲線一次不静定単純桁の解析を行なった。

2. S 字形曲線静定単純桁

S 字形曲線静定単純桁とは、水平面内に二つの円弧から成る S 字形曲線を有し、両端が曲げに対して単純支持であり、同時に一端だけがねじりに対して抵抗し、他端がねじりに対して自由な桁をいう。ここでは曲げねじりは考えない。

(1) 集中荷重 P による断面力

座標及び断面力の符号は、図-1 (a), (b) を参照。静定単純桁の解析は図-1 のように変曲点 C で桁を切断し、切断面に、ねじりモーメント T_C 、曲げモーメント M_C 、せん断力 Q_C を挿入する。円弧 O_1 について、軸 O_1-A 、及びそれに直角な方向の軸のまわりのモーメントの平衡条件と、垂直方向の力の平衡条件より三つの平衡条件式を得る。円弧 O_2 についても同様に三つの平衡条件式が得られる。

a) 集中荷重 P が円弧 O_1 上にある場合 ($0 \leq w_1 \leq \phi_1$)

図-1 (a) から円弧 O_1 に関する、三つの平衡条件式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} M_C + P \cdot R_1 \sin(\phi_1 - w_1) + V_A R_1 \sin \phi_1 &= 0 \\ T_C + P R_1 (1 - \cos(\phi_1 - w_1)) + V_A R_1 (1 - \cos \phi_1) &= 0 \\ P + V_A + Q_C &= 0 \end{aligned}$$

円弧 O_2 に関する平衡条件式は

$$\begin{aligned} M_C + V_B R_2 \sin \phi_2 - T_B \sin \phi_2 &= 0 \\ T_C + V_B R_2 (1 - \cos \phi_2) + T_B \cos \phi_2 &= 0 \\ V_B + Q_C &= 0 \end{aligned}$$

以上の六元連立方程式を解けば

$$\begin{aligned} V_A &= -P \cdot \frac{R_1 \sin(\phi_1 - \phi_2 - w_1) + (R_1 + R_2) \sin \phi_2}{R_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) + (R_1 + R_2) \sin \phi_2}, \\ V_B &= P \cdot \frac{R_1 [\sin(\phi_1 - \phi_2 - w_1) - \sin(\phi_1 - \phi_2)]}{R_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) + (R_1 + R_2) \sin \phi_2}, \\ T_B &= -\frac{PR}{\sin \phi_2} \left[\frac{[\sin(\phi_1 - \phi_2 - w_1) - \sin(\phi_1 - \phi_2)] (R_1 \sin \phi_1 + R_2 \sin \phi_2)}{R_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) + (R_1 + R_2) \sin \phi_2} \right. \\ &\quad \left. + \sin \phi_1 - \sin(\phi_1 - w_1) \right], \\ Q_C &= V_B, \\ M_C &= PR \left[\frac{R_1 \sin(\phi_1 - \phi_2 - w_1) + (R_1 + R_2) \sin \phi_2}{R_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) + (R_1 + R_2) \sin \phi_2} \times \sin \phi_1 - \sin(\phi_1 - w_1) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

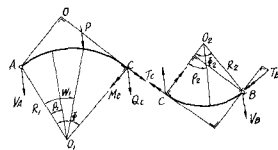
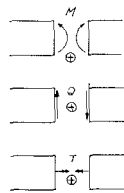


図-1 (a)

図-1 (b) 断面力の符号 (円の中心 O_1 の側から見て)

$$Tc = PR_1 \left[\frac{R_1 \sin(\phi_1 - \phi_2 - w_1) + (R_1 + R_2) \sin \phi_2}{R_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) + (R_1 + R_2) \sin \phi_2} \times (1 - \cos \phi_1) \right. \\ \left. + \cos(\phi_1 - w_1) - 1 \right].$$

式 (1) の V_A を用いて、断面力を表わすと次のようになる。ただし、断面力のサフィックス P_1, P_2 は、それぞれ P による円弧 O_1 、円弧 O_2 の断面力を表わす
又 P が円弧 O_1 上にあるという意味で $V_A = V_{A1}$ とする。

i) $0 \leq \rho_1 \leq w_1$ では

$$\begin{aligned} T_{P1} &= -V_{A1} R_1 (1 - \cos \rho_1), \\ M_{P1} &= -V_{A1} R_1 \sin \rho_1, \\ Q_{P1} &= -V_{A1}. \end{aligned} \tag{2}$$

ii) $w_1 < \rho_1 < \phi_1$ では

$$\begin{aligned} T_{P1} &= -V_{A1} R_1 (1 - \cos \rho_1) - P R_1 (1 - \cos \bar{\rho}_1 - w_1), \\ M_{P1} &= -V_{A1} R_1 \sin \rho_1 - P R_1 \sin(\rho_1 - w_1), \\ Q_{P1} &= -V_{A1} - P. \end{aligned} \tag{3}$$

iii) $0 \leq \rho_2 \leq \phi_2$ では

$$\begin{aligned} T_{P2} &= V_{A1} \left[R_2 (1 - \cos \rho_2) + R_1 (\cos \bar{\phi}_1 - \bar{\rho}_2 - \cos \rho_2) \right] \\ &\quad + P \left[R_2 (1 - \cos \rho_2) + R_1 (\cos \bar{\phi}_1 - w_1 - \bar{\rho}_2 - \cos \rho_2) \right], \\ M_{P2} &= V_{A1} \left[R_2 \sin \rho_2 + R_1 (\sin \bar{\phi}_1 - \bar{\rho}_2 + \sin \rho_2) \right] \\ &\quad - P \left[R_2 \sin \rho_2 + R_1 (\sin \bar{\phi}_1 - w_1 - \bar{\rho}_2 + \sin \rho_2) \right], \\ Q_{P2} &= -V_{A1} - P. \end{aligned} \tag{4}$$

b) P が円弧 O_2 上にある場合

この場合も a) と同様に解くことができる。この場合の支点 A における反力を V_{A2} とすると

$$V_{A2} = -P \cdot \frac{R_2 \sin(\phi_2 - w_2)}{R_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) + (R_1 + R_2) \sin \phi_2}. \tag{5}$$

V_{A2} によって断面力を表わすと

i) $0 \leq \rho_1 \leq \phi_1$ では

$$\begin{aligned} T_{P1} &= -V_{A2} R_1 (1 - \cos \rho_1), \\ M_{P1} &= -V_{A2} R_1 \sin \rho_1, \\ Q_{P1} &= -V_{A2}. \end{aligned} \tag{6}$$

ii) $0 \leq \rho_2 \leq w_2$ では

$$\begin{aligned} T_{P2} &= V_{A2} \left[R_2 (1 - \cos \rho_2) + R_1 (\cos \bar{\phi}_1 - \bar{\rho}_2 - \cos \rho_2) \right], \\ M_{P2} &= -V_{A2} \left[R_2 \sin \rho_2 + R_1 (\sin \bar{\phi}_1 - \bar{\rho}_2 + \sin \rho_2) \right], \\ Q_{P2} &= -V_{A2}. \end{aligned} \tag{7}$$

iii) $w_2 \leq \rho_2 \leq \phi_2$ では

$$\begin{aligned} T_{P2} &= V_{A2} \left[R_2 (1 - \cos \rho_2) + R_1 (\cos \bar{\phi}_1 - \bar{\rho}_2 - \cos \rho_2) \right] \\ &\quad + P R_2 (1 - \cos \rho_2 - w_2), \\ M_{P2} &= -V_{A2} \left[R_2 \sin \rho_2 + R_1 (\sin \bar{\phi}_1 - \bar{\rho}_2 + \sin \rho_2) \right] - P R_2 \sin(\rho_2 - w_2), \end{aligned} \tag{8}$$

$$Q_{P2} = -V_{A2} - P.$$

(2) ねじりモーメント T による断面力

(1) と同様に以下の六元連立方程式が得られる (図-2 参照)。

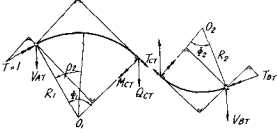


図-2

円弧 O_1 についての平衡条件式は

$$M_{CT} - T \sin \phi_1 + V_{AT} R_1 \sin \phi_1 = 0,$$

$$T_{CT} + T \cos \phi_1 + V_{AT} R_1 (1 - \cos \phi_1) = 0,$$

$$Q_{CT} + V_{AT} = 0,$$

円弧 O_2 についての平衡条件式は

$$M_{CT} + V_{BT} R_2 \sin \phi_2 - T_{BT} \sin \phi_2 = 0,$$

$$T_{CT} + V_{BT} R_2 (1 - \cos \phi_2) + T_{BT} \cos \phi_2 = 0,$$

$$V_{BT} - Q_{CT} = 0.$$

これら六元連立方程式を解けば

$$\left. \begin{aligned} V_{AT} &= T \cdot \frac{\sin(\phi_1 - \phi_2)}{R_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) + (R_1 + R_2) \sin \phi_2}, \\ V_{BT} &= -T_1 \cdot \frac{\sin(\phi_1 - \phi_2)}{R_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) + (R_1 + R_2) \sin \phi_2}, \\ T_{BT} &= \frac{T}{\sin \phi_2} \left[\sin \phi_1 - \frac{(R_1 \sin \phi_1 + R_2 \sin \phi_2) \sin(\phi_1 - \phi_2)}{R_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) + (R_1 + R_2) \sin \phi_2} \right], \\ M_{CT} &= T \left[\sin \phi_1 - \frac{R_1 \sin \phi_1 \sin(\phi_1 - \phi_2)}{R_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) + (R_1 + R_2) \sin \phi_2} \right], \\ T_{CT} &= -T \left[\cos \phi_1 + \frac{R_2 (1 - \cos \phi_2) \sin(\phi_1 - \phi_2)}{R_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) + (R_1 + R_2) \sin \phi_2} \right], \\ Q_{CT} &= -V_{AT}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

V_{AT} によって断面力を表わすと次のようになる。

i) $0 \leq \rho_1 \leq \phi_1$ では

$$\left. \begin{aligned} T_{r1} &= -T \cos \rho_1 - V_{AT} R_1 (1 - \cos \rho_1), \\ M_{r1} &= T \sin \rho_1 - V_{AT} R_1 \sin \rho_1, \\ Q_{r1} &= -V_{AT}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ii) $0 \leq \rho_2 \leq \phi_2$ では

$$\left. \begin{aligned} T_{r2} &= -T \cos(\phi_1 - \rho_2) + V_{AT} [R_2 (1 - \cos \rho_2) + R_1 (\cos \phi_1 - \rho_2 - \cos \rho_2)], \\ M_{r2} &= T \sin(\phi_1 - \rho_2) - V_{AT} [R_2 \sin \rho_2 + R_1 (\sin \phi_1 - \rho_2 + \sin \rho_2)], \\ Q_{r2} &= -V_{AT}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(3) 支点ねじりモーメント $T=1$ によるたわみ曲線

$T=1$ によるねじりモーメント、曲げモーメントをそれぞれ T_r , M_r とし、 $P=1$ によるそれらを T_r , M_r とすると $T=1$ によるたわみ曲線 f_r は

$$f_r = \int_0^{\phi_1} \left(\frac{M_r}{EI} + \frac{T_r T_r}{GI_r} \right) R_1 d\rho_1 + \int_0^{\phi_2} \left(\frac{M_r}{EI} + \frac{T_r T_r}{GI_r} \right) R_2 d\rho_2 \quad (12)$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \lambda, \quad \frac{EI}{GI_r} = k \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{R_1}{EI} \right) f_r &= (V_{AT} R_1 - 1) (V_{AT} c_1 + c_2) - k \left[(V_{AT} R_1 - 1) (V_{AT} c_3 + c_4) + V_{AT} R_1 (V_{AT} \phi_1 - c_5) - V_{AT} (2 \cdot V_{AT} R_1 - 1) c_6 - \{(V_{AT} + 1) (V_{AT} R_1 - 1) + V_{AT} V_{AT} R_1\} c_7 \right], \\ &+ \lambda \left[(1 + \lambda) \cdot \{(V_{AT} + 1) (V_{AT} R_1 - 1) + V_{AT} V_{AT} R_1\} c_8 + (V_{AT} R_1 - 1) (V_{AT} c_9 + c_{10}) + (1 + \lambda) V_{AT} R_1 \{(V_{AT} + 1) (1 + \lambda) c_{11} + c_{12}\} \right] + \lambda k \left[(V_{AT} R_1 - 1) (V_{AT} c_{13} + c_{14}) + \{(V_{AT} + 1) (V_{AT} R_1 - 1) \right. \\ &+ V_{AT} V_{AT} R_1\} \{\lambda c_{15} - (1 + \lambda) c_{16}\} + (1 + \lambda) (V_{AT} + 1) V_{AT} R_1 \{1 + \lambda \cdot c_{17} - 2 \lambda c_{18}\} + V_{AT} R_1 \{\lambda c_{19} - (1 + \lambda) c_{20}\} + (V_{AT} + 1) V_{AT} R_1 \lambda^2 c_{21} \}. \end{aligned} \quad (13)$$

ただし式 (13) で

$$c_1 = \frac{(\phi_2 - \sin \phi_1 \cos \phi_1)}{2}, \quad c_2 = \frac{[(\phi_1 - w_1) \cos w_1 - \cos \phi_1 \sin(\phi_1 - w_1)]}{2}, \quad c_3 = \frac{[\phi_1 + \sin \phi_1 \sin \phi_1]}{2}, \quad c_4 = \frac{[(\phi_1 - w_1) \cos w_1 + \cos \phi_1 \sin(\phi_1 - w_1)]}{2},$$

$$\left. \begin{aligned}
c_8 &= w_1 - \phi_1 + \sin(\phi_1 - w_1), & c_9 &= \sin w_1, & c_{10} &= \sin \phi_1 - \sin w_1, & c_{11} &= -\frac{[\phi_2 \cos \phi_1 - \cos(\phi_1 - \phi_2) \sin \phi_2]}{2}, \\
c_{12} &= \frac{[\phi_2 - \sin \phi_2 \cos(2\phi_1 - \phi_2)]}{2}, & c_{13} &= \frac{[\phi_2 \cos w_1 - \sin \phi_2 \cos(2\phi_1 - \phi_2 - w_1)]}{2}, & c_{14} &= \frac{(\phi_2 - \sin \phi_2 \cos \phi_2)}{2}, \\
c_{15} &= \frac{-[\phi_2 \cos(\phi_1 - w_1) - \cos(\phi_1 - \phi_2 - w_1) \sin \phi_2]}{2}, & c_{16} &= \frac{[\phi_2 + \sin \phi_2 \cos(2\phi_1 - \phi_2)]}{2}, & c_{17} &= \frac{[\phi_2 \cos w_1 + \sin \phi_2 \cos(2\phi_1 - \phi_2 - w_1)]}{2}, \\
c_{18} &= \sin \phi_1 - \sin(\phi_1 - \phi_2), & c_{19} &= \frac{[\phi_2 \cos \phi_1 + \sin \phi_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)]}{2}, & c_{20} &= \frac{(\phi_2 + \sin \phi_2 \cos \phi_2)}{2}, \\
c_{21} &= \sin \phi_2, & c_{22} &= \sin(\phi_1 - w_1) - \sin(\phi_1 - \phi_2 - w_1), & c_{23} &= \frac{[\phi_2 \cos(\phi_1 - w_1) + \sin \phi_2 \cos(\phi_1 - \phi_2 - w_1)]}{2}.
\end{aligned} \right\} \quad (14)$$

円弧 O_2 の部分のたわみ曲線 f_{r2} も同様にして計算されるので省略する。

3. S 字形曲線一次不静定単純桁

(1) 不静定力の影響線 いま 図-3 (a) のような S 字形曲線一次不静定桁を考える。それには 図-3 (b) のように一端におけるねじりの抵抗を解放したもの、

即ち 2. の S 字形曲線静定単純桁を基本系にえらびその代り不静定ねじりモーメント $X=1$ を挿入する。いま外力として、 $P=1$ のみが作用する場合を考えると仕

事方程式は

$$\delta_{11}X + \delta_{10} = 0,$$

ここで δ_{11} は基本系に $X=1$ が作用している状態で、 $X=1$ がなす仕事、 δ_{10} は同

じ状態における基本系の垂直変位図であり f_{r1} f_{r2} のことである。

δ_{11} は

$$\delta_{11} = \int_0^{\phi_1} \left(\frac{M_T^2}{EI} + \frac{T_T^2}{GI_T} \right) R_1 d\phi_1 + \int_0^{\phi_2} \left(\frac{M_T^2}{EI} + \frac{T_T^2}{GI_T} \right) R_2 d\phi_2,$$

で与えられる。 M_T , T_T は既に 2) で与えられているからそれらを代入して計算すると結局、

$$\begin{aligned}
\delta_{11} \left(\frac{EI}{R} \right) &= (V_{AR}R-1)^2 c_1 + k \left[(V_{AR}R_1-1)^2 c_3 - 2V_{AR}R_1(V_{AR}R_1-1)(c_9+c_{11}) + V_{AR}^2 R_1^2 \phi_1 \right] + \lambda \left[(V_{AR}R_1-1)^2 c_9 + 2V_{AR}R_1(1+\lambda)(V_{AR}R_1-1)c_3 + V_{AR}^2 R_1^2 (1+\lambda)^2 c_{11} \right] \\
&+ k \left[(V_{AR}R_1-1)^2 c_{13} + V_{AR}^2 R_1^2 (1+\lambda)^2 c_{15} - 2V_{AR}R_1(V_{AR}R_1-1)(1+\lambda)c_{16} - 2V_{AR}^2 R_1^2 \lambda(1+\lambda)c_{18} + 2V_{AR}R_1(V_{AR}R_1-1)\lambda c_{19} + V_{AR}^2 R_1^2 \lambda^2 c_{21} \right],
\end{aligned}$$

故に不静定力影響線 „ X ” は

$P=1$ が円弧 O_1 にある場合

$${}_nX''(w_1) = -\frac{R_1 f_{r1}}{\delta_{11}},$$

$P=1$ が円弧 O_2 上にある場合

$${}_nX''(w_2) = -\frac{R_2 f_{r2}}{\delta_{11}}.$$

(2) 断面力影響線 以下で、 ${}_nV_A''$, ${}_nV_A''$ はそれぞれ式 (1), (5) と同じものである。

i) 円弧 O_1 上の $\rho=\rho_1$ 点の影響線

a) $0 < w_1 < \rho_1$ では

$$\begin{aligned}
{}_nT_{r1}'' &= -{}_nV_{A1}''R_1(1-\cos \rho_1) - R_1(1-\cos \rho_1 - w_1) \left[\cos \rho_1 + V_{AR}R_1(1-\cos \rho_1) \right] \cdot {}_nX''(w_1), \\
{}_nM_{r1}'' &= -{}_nV_{A1}''R_1 \sin \rho_1 - R_1 \sin(\rho_1 - w_1) - (V_{AR}R_1-1) \sin \rho_1 \cdot {}_nX''(w_1), \\
{}_nQ_{r1}'' &= -{}_nV_{A1}'' - 1 - V_{AR} \cdot {}_nX''(-w_1).
\end{aligned}$$

b) $\rho_1 \leq w_1 \leq \phi_1$ では

$$\begin{aligned}
{}_nT_{r1}'' &= -{}_nV_{A1}''R_1(1-\cos \rho_1) - \left[V_{AR}R_1(1-\cos \rho_1) + \cos \rho_1 \right] \cdot {}_nX''(w_1), \\
{}_nM_{r1}'' &= -{}_nV_{A1}''R_1 \sin \rho_1 - (V_{AR}R_1-1) \sin \rho_1 \cdot {}_nX''(w_1), \\
{}_nQ_{r1}'' &= -{}_nV_{A1}'' - V_{AR} \cdot {}_nX''(w_1).
\end{aligned}$$

c) $0 \leq w_2 \leq \phi_2$ では

$$\begin{aligned}
{}_nT_{r2}'' &= -{}_nV_{A2}''R_2(1-\cos \rho_2) - \left[V_{AR}R_2(1-\cos \rho_2) + \cos \rho_2 \right] \cdot {}_nX''(w_2), \\
{}_nM_{r2}'' &= -{}_nV_{A2}''R_2 \sin \rho_2 - (V_{AR}R_2-1) \sin \rho_2 \cdot {}_nX''(w_2), \\
{}_nQ_{r2}'' &= -{}_nV_{A2}'' - V_{AR} \cdot {}_nX''(w_2).
\end{aligned}$$

ii) 円弧 O_2 上の $\rho=\rho_2$ 点の影響線 これも a) と同様に表わされるので省略する。

(3) 等分布荷重 q を満載した場合の断面力 これは、(2) の影響線の面積を求め q を乗じればよい。

$$\begin{aligned}
\text{i) ねじりモーメント } T_q & \quad \frac{T_q}{q} = \int_0^{\phi_1} \left[-{}_nV_{A1}''R_1(1-\cos \rho_1) - R_1(1-\cos \rho_1 - w_1) \right] R_1 dw_1 + \int_{\rho_1}^{\phi_1} \left[-{}_nV_{A1}''R_1(1-\cos \rho_1) \right] R_1 dw_1 + \int_0^{\phi_2} \left[-{}_nV_{A2}''R_2(1-\cos \rho_2) \right] R_2 dw_2 \\
& \quad + \int_0^{\phi_1} \left[-\left[V_{AR}R_1(1-\cos \rho_1) + \cos \rho_1 \right] \cdot {}_nX''(w_1) \right] R_1 dw_1 + \int_0^{\phi_1} \left[-\left[V_{AR}R_1(1-\cos \rho_1) + \cos \rho_1 \right] \cdot {}_nX''(w_2) \right] R_2 dw_2, \\
\text{ii) 曲げモーメント } M_q & \quad \frac{M_q}{q} = \int_0^{\phi_1} \left[-{}_nV_{A1}''R_1 \sin \rho_1 - R_1 \sin(\rho_1 - w_1) \right] R_1 dw_1 + \int_{\rho_1}^{\phi_1} \left[-{}_nV_{A1}''R_1 \sin \rho_1 \right] R_1 dw_1 + \int_0^{\phi_2} \left[-{}_nV_{A2}''R_2 \sin \rho_2 \right] R_2 dw_2 \\
& \quad + \int_0^{\phi_1} \left[-(V_{AR}R_1-1) \sin \rho_1 \cdot {}_nX''(w_1) \right] R_1 dw_1 + \int_0^{\phi_1} \left[-(V_{AR}R_1-1) \sin \rho_1 \cdot {}_nX''(w_2) \right] R_2 dw_2, \\
\text{iii) せん断力 } Q_q & \quad \frac{Q_q}{q} = \int_0^{\phi_1} (-{}_nV_{A1}'' - 1) R_1 dw_1 + \int_{\rho_1}^{\phi_1} (-{}_nV_{A1}'') R_1 dw_1 + \int_0^{\phi_2} (-{}_nV_{A2}'') R_2 dw_2 + \int_0^{\phi_1} [-V_{AR} \cdot {}_nX''(w_1)] R_1 dw_1 + \int_0^{\phi_1} [-V_{AR} \cdot {}_nX''(w_2)] R_2 dw_2,
\end{aligned}$$

i), ii), iii) の積分は、既に前節 で与えられているものを代入すればよい。