

早稲田大学 正員 平嶋政治

早稲田大学 学生員 矢島鎧司

1 緒言

一般に薄肉断面部材をもつ曲線桁の解析では、曲げ換りによる反り応力と共に断面形状の変化を考慮する必要がある。閉断面直線桁の W.S. WLASSOW⁽¹⁾ の解析方法を曲線桁に一般化して基本式を導き、さらに矩形箱型断面の場合に適用して基本微分方程式系を求めた。次ぎに数値計算を行ないそれらの結果を図示する。

2 基本式

軸方向変位 $u(z, s)$ と 横方向変位 $v(z, s)$ を 2 つの互いに独立な関数の積の和の形で表わす。

$$u(z, s) = \sum_{i=1}^m U_i(z) \cdot \varphi_i(s) \quad (1)$$

$$v(z, s) = \sum_{k=1}^n V_k(z) \cdot \psi_k(s) \quad (2)$$

ここで $\varphi_i(s)$ と $\psi_k(s)$ は、さきもつて選ばれる関数、 $U_i(z)$ と $V_k(z)$ は、求める関数、 m, n は、それぞれ面外、及び面内の自由度である。

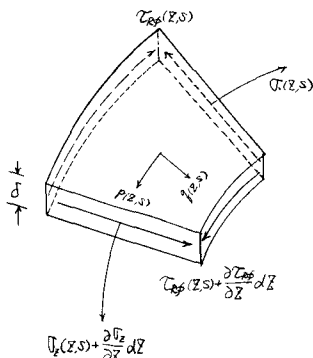
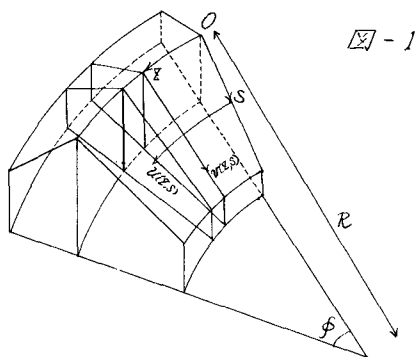
これらの式を Hooke の法則に代入して

$$\sigma = E \sum U_i'(z) \varphi_i'(s) \quad (3)$$

$$\tau = G \left[\sum U_i(z) \varphi_i'(s) + \sum V_k'(z) \psi_k(s) \right] \quad (4)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots m$$

$$k = 1, 2, 3 \dots n$$



仮想変位と $\delta u_j(z, s) = 1 \cdot \varphi_j$, $\delta v_k(z, s) = 1 \cdot \psi_k$ として、仮想仕事の原理から

$$\oint_R \frac{\partial \sigma}{\partial z} \varphi_j dF - \oint_R \tau_{zs} \varphi_j' dF + \oint_R \frac{2 \tau_{zs}}{R} \varphi_j dF + \oint_L p \varphi_j ds = 0 \quad (5)$$

$$\oint_R \frac{\partial \tau}{\partial z} \psi_k dF - \oint_R \frac{\sigma_z}{R} \psi_k dF - \sum V_k \oint_L \frac{M_k M_k}{E J} ds + \oint_L q \psi_k ds = 0 \quad (6)$$

(6)式のオ3項は、断面から切り出した要素の曲げ変形による内力の仕事である。

(5), (6) 式に σ , τ の関係を代入すれば.

$$\left. \begin{aligned} \gamma \sum_i a_{ji} U_i'' - \sum_i (b_{ji} - \frac{2}{E} f_{ji}) U_i' - \sum_i (c_{jk} - \frac{2}{E} d_{jk}) V_k' + \frac{1}{G} p_j &= 0 \\ \sum_k r_{k\ell} V_k'' + \sum_i (c_{ki} - \frac{\gamma}{E} d_{ki}) U_i' - \gamma \sum_k s_{k\ell} V_k + \frac{1}{G} q_\ell &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで

$$\gamma = \frac{E}{G}$$

$$a_{ji} = \int_F \varphi_j(s) \varphi_i(s) dF, \quad b_{ji} = \int_F \varphi_j'(s) \varphi_i(s) dF$$

$$c_{jk} = \int_F \varphi_j'(s) \psi_k(s) dF, \quad f_{ji} = \int_F \varphi_j(s) \varphi_i'(s) dF$$

$$d_{jk} = \int_F \varphi_j(s) \psi_k'(s) dF, \quad c_{ki} = \int_F \psi_k'(s) \varphi_i(s) dF$$

$$r_{k\ell} = \int_F \psi_k(s) \psi_\ell(s) dF, \quad d_{ki} = \int_F \psi_k(s) \varphi_i(s) dF$$

$$s_{k\ell} = \frac{1}{E} \int_L \frac{M_k(s) M_\ell(s)}{EJ} ds, \quad \begin{aligned} i, j &= 1, 2, 3, \dots, m \\ k, \ell &= 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

又、断面力は、面外及び面内方向各々次の如く表わせる。

$$P_j = \int_F \sigma \varphi_j dF, \quad Q_k = \int_F \tau \psi_k dF$$

上式に σ , τ の関係を代入すると

$$\left. \begin{aligned} P_j &= E \sum_i a_{ji} U_i' \\ Q_k &= G \left[\sum_i c_{ki} U_i + \sum_\ell r_{k\ell} V_\ell' \right] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(8) の上の式と (3) 式より $P_1 = \int_F \sigma \cdot 1 dF = N$, $P_2 = \int_F \sigma \cdot x dF = -M_y$, $P_3 = \int_F \sigma \cdot y dF = M_x$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = x$, $\varphi_3 = y$ として $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y$ となり周知の式を得る。

ここで U_j , V_k は各々一般の変位を表わしている、即ち微少部分についての釣り合いから式を求めたので、実際の構造物の計算においては一つの基準座標(オイラー系)に変換しなければならない。

3 矩形断面

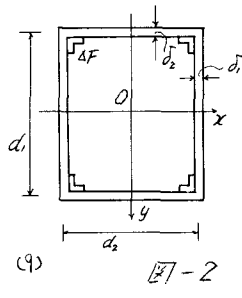
2 で求めた基本式を箱型断面に適用すると、まず

$$\varphi_1(s) = 1, \quad \varphi_2(s) = x, \quad \varphi_3(s) = y, \quad \varphi_4(s) = xy$$

$$\psi_1(s) = \kappa, \quad \psi_2(s) = x', \quad \psi_3(s) = y', \quad \psi_4(s) = xy' + x'y'$$

又、幾何学的条件から一般の変位を基準座標に変換すると、

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \xi, \quad U_2 = \eta, \quad U_2' = -\eta'' + \frac{\theta}{E}, \quad U_3 = \xi', \quad U_3' = \xi'' + \frac{\xi}{E} \\ V_2 &= \xi, \quad V_3 = \eta, \quad V_1 = \theta, \quad U_4 = U, \quad V_4 = \gamma \theta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$



ただしここで U は反り (Verwölbung), κ は形状変形 (Konturdeformation) である。

箱型断面の基本微分方程式は、

$$\left. \begin{aligned} EFU'' + \frac{2E}{\rho} \{ F_2(U_2 + V_2') + F_1(U_3 + V_3') \} + p_1 &= 0 \\ EJ_y U_2'' - 2GF_2(U_2 + V_2') + \frac{G}{\rho} d_1^2 F_1(U_4 + V_1' + V_4') + p_2 &= 0 \\ 2GF_2(U_2 + V_2'') - \frac{2}{\rho} EFU_2' + q_2 &= 0 \\ EJ_x U_3'' - 2GF_1(U_3 + V_3') + \frac{G}{\rho} d_1^2 F_2(U_4 + V_1' + V_4') + p_3 &= 0 \\ 2GF_1(U_3 + V_3'') - \frac{2}{\rho} EFU_3' + q_3 &= 0 \\ aU_4'' - b_1U_4 - b_2V_1' - b_3V_4' + p_4 &= 0 \\ b_2U_4' + b_1V_1' + b_3V_4'' - \frac{\gamma}{\rho} \{ (b_1 + b_2)U_2' - (b_1 - b_2)U_3' \} + q_1 &= 0 \\ b_1U_4' + b_2V_4'' + b_3V_4' - \frac{\gamma}{\rho} \{ (b_1 + b_2)U_2' + (b_1 - b_2)U_3' \} - cV_4' + q_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで

$$F = 2F_1 + 2F_2 + 4\Delta F$$

$$J_x = d_1^2 \left(\frac{F_1}{6} + \frac{F_2}{2} + \Delta F \right)$$

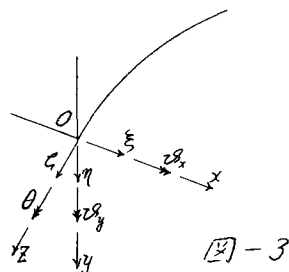
$$J_y = d_2^2 \left(\frac{F_2}{6} + \frac{F_1}{2} + \Delta F \right)$$

$$a = \frac{1}{24} E d_1^2 d_2^2 (F_1 + F_2 + 6\Delta F)$$

$$b_1 = \frac{1}{2} G (d_1^2 F_1 + d_2^2 F_2)$$

$$b_2 = \frac{1}{2} G (-d_1^2 F_1 + d_2^2 F_2)$$

$$c = \frac{96}{\frac{d_1}{EJ_1} + \frac{d_2}{EJ_2}}$$



断面力は

$$\left. \begin{aligned} N &= EFU_1' \\ M_x &= EJ_x U_3' \\ M_y &= -EJ_y U_2' \\ Q_x &= 2GF_2(U_2 + V_2') \\ Q_y &= 2GF_1(U_3 + V_3') \\ H &= b_2U_4 + b_1V_1' + b_3V_4' \\ B &= -aU_4' \\ Q &= b_1U_4 + b_2V_1' + b_3V_4' \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

N : 軸力, M_x, M_y : 曲げモーメント, Q_x, Q_y : 剪断力, H : 捩りモーメント, B : バイモーメント (反り), Q : 横方向バイモーメント (断面変化)。

(10) (11) 式と (9) の関係とを考慮して微分方程式を解き、一般解の積分定数と初期値で置きかえ

2 Anfangsmatrixを作ると16元のMatrixとなる。

4 数値計算例

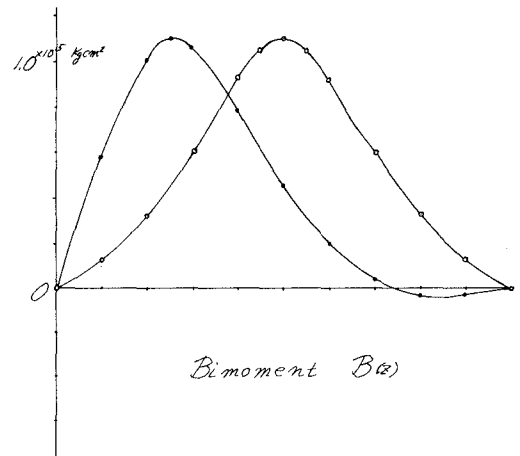
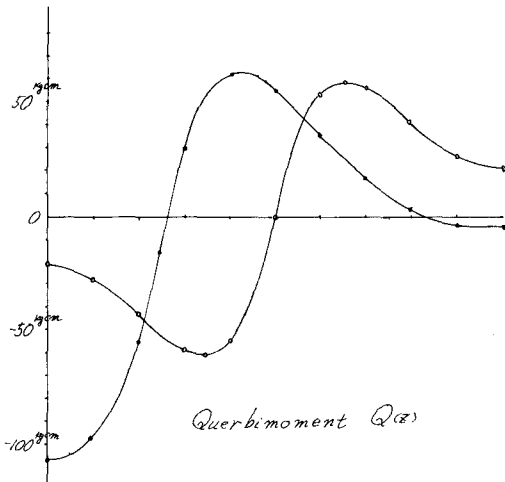
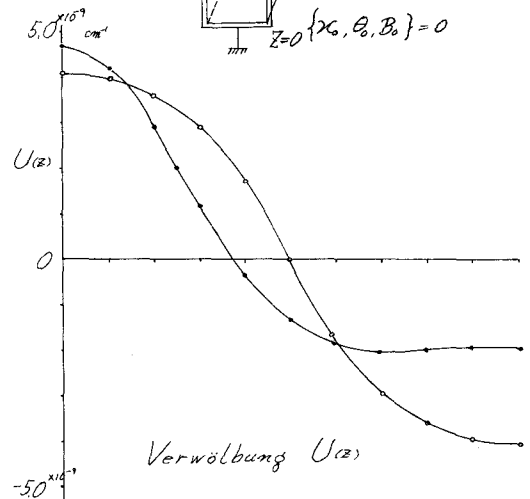
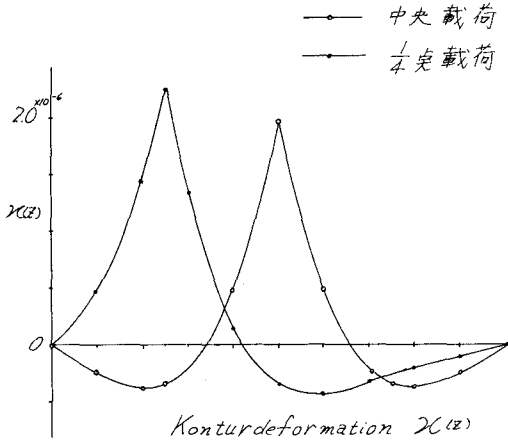
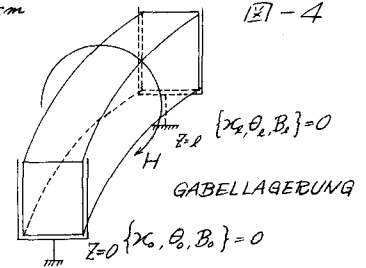
$$d_1 = 175.00 \text{ cm}, d_2 = 160.00 \text{ cm}, d_1 = 1.00 \text{ cm}, d_2 = 2.00 \text{ cm}$$

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, G = 0.4E$$

$$\rho = 5500.00 \text{ cm}$$

$$R = 35000.00 \text{ cm}$$

$$H = 1 \text{ t.m}$$



5 結論

以上 薄肉閉断面部材の断面の変化を考慮した一般式を変分法を用いて誘導し矩型箱型断面に適用数値計算を試みたが、断面の変化と新しく切り出した単位巾をもちいたラーメンの変形と考えているので、ラーメン部材の剛性を考える事により断面のダイアフラム等により補強された部材の影響と即座では算出が出来ると思われる。

1) "Dünnwandige elastische Stäbe" W.S. Wlassow Veb Verlag für Bauwesen Berlin, 1964