

徳島大学工学部 正員 堀嶋 弘行

1 はしがき.

斜腹材を有するアーチ系構造物とは、トラスド・ランガー桁、トラスド・ローゼ桁、および、トラスド・タイドアーチなどを意味するものとし、以下これらを斜腹材系とよび、これに対して、鉛直吊材を有するランガー桁、ローゼ桁、および、タイドアーチなどを鉛直吊材系と呼ぶことにする。

斜腹材系の静的、および、動的性状に関しては、すでに、比較的多くの研究がなされており、斜腹材系が鉛直吊材系に比較して、i) 弦材の曲げモーメントが減少する。ii) 剛性が大きい。iii) 振動の減衰が早い。iv) 鋼重が軽減できる。などの利点を有していることが報告されている。この研究は、斜腹材系を耐荷能力の面からさらに検討する目的で、斜腹材系と鉛直吊材系の両システムについて、安定解析と塑性解析とを平行して行ない、両解析結果から極限荷重を決定し、両システム間の相違について比較考察したものである。解析の方法としては、安定解析の分野では、軸力の二次的影響を考慮した変形法を用い、塑性解析の分野では、弾性計算手段として通常の変形法を用いた内力追跡法を用いて、電子計算機に自動的に解析させる方法をとった。

2 安定解析における座屈荷重の計算法.

a) 変形法の基本式. いま、一般座標系 Σ 内にある構造物中の任意の部材 ij をえらび、これについて、軸力の二次的影響を考慮した変形法の基本式を書けば、式(1)~(3) のようである。

i) ij 両端剛節部材に対する基本式.

$$\begin{aligned} P_{xij} &= a_{ij}(u_i - u_j) + b_{ij}(v_i - v_j) - C_{ij}(\theta_i + \theta_j), & M_{ij} &= -C_{ij}(u_i - u_j) + \bar{C}_{ij}(v_i - v_j) \\ P_{yij} &= b_{ij}(u_i - u_j) + \bar{a}_{ij}(v_i - v_j) + \bar{C}_{ij}(\theta_i + \theta_j), & & + d_{ij} \cdot \theta_i + \bar{d}_{ij} \cdot \theta_j \end{aligned} \quad (1)$$

ii) i 端滑節, j 端剛節部材に対する基本式.

$$\begin{aligned} P_{xij} &= a'_{ij}(u_i - u_j) + b'_{ij}(v_i - v_j) - C'_{ij} \cdot \theta_j, & M_{ij} &= 0 \\ P_{yij} &= b'_{ij}(u_i - u_j) + \bar{a}'_{ij}(v_i - v_j) + \bar{C}'_{ij} \cdot \theta_j, & & \end{aligned} \quad (2)$$

iii) i 端剛節, j 端滑節部材に対する基本式.

$$\begin{aligned} P_{xij} &= a'_{ij}(u_i - u_j) + b'_{ij}(v_i - v_j) - C'_{ij} \cdot \theta_i, & M_{ij} &= -C'_{ij}(u_i - u_j) + \bar{C}'_{ij}(v_i - v_j) \\ P_{yij} &= b'_{ij}(u_i - u_j) + \bar{a}'_{ij}(v_i - v_j) + \bar{C}'_{ij} \cdot \theta_i, & & + d'_{ij} \cdot \theta_i \end{aligned} \quad (3)$$

上式中、

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{EF}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \left(\frac{q_8}{q_8} \right) \sin^2 \alpha, & \bar{a} &= \frac{EF}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \left(\frac{q_8}{q_8} \right) \cos^2 \alpha, \\ b &= \left\{ \frac{EF}{l} - \frac{12EI}{l^3} \left(\frac{q_8}{q_8} \right) \right\} \sin \alpha \cdot \cos \alpha, & c &= \frac{6EI}{l^2} \left(\frac{q_2}{q_2} \right) \sin \alpha, & \bar{c} &= \frac{6EI}{l^2} \left(\frac{q_2}{q_2} \right) \cos \alpha, \\ d &= \frac{4EI}{l} \left(\frac{q_3}{q_3} \right), & \bar{d} &= \frac{2EI}{l} \left(\frac{q_4}{q_4} \right), & a' &= \frac{EF}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \left(\frac{q_8}{q_8} \right) \sin^2 \alpha, \\ \bar{a}' &= \frac{EF}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \left(\frac{q_8}{q_8} \right) \cos^2 \alpha, & b' &= \left\{ \frac{EF}{l} - \frac{3EI}{l^3} \left(\frac{q_8}{q_8} \right) \right\} \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \\ c' &= \frac{3EI}{l^2} \left(\frac{q_7}{q_7} \right) \sin \alpha, & \bar{c}' &= \frac{3EI}{l^2} \left(\frac{q_7}{q_7} \right) \cos \alpha, & d' &= \frac{3EI}{l} \left(\frac{q_7}{q_7} \right), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \pi l \sin \pi l / 2 (1 - \cos \pi l), \quad \varphi_2 = \pi^2 l^2 (1 - \cos \pi l) / 6 \{ 2 (1 - \cos \pi l) - \pi l \sin \pi l \}, \\ \varphi_3 &= (3 \varphi_2 + \varphi_1) / 4, \quad \varphi_4 = (3 \varphi_2 - \varphi_1) / 2, \quad \varphi_5 = \varphi_1 \cdot \varphi_2, \quad \varphi_6 = 4 \varphi_5 - 3 \varphi_2^2 / \varphi_3, \quad \varphi_7 = \varphi_5 / \varphi_3, \\ \bar{\varphi}_1 &= -\pi l \sinh \pi l / 2 (1 - \cosh \pi l), \quad \bar{\varphi}_2 = -\pi^2 l^2 (1 - \cosh \pi l) / 6 \{ 2 (1 - \cosh \pi l) + \pi l \sinh \pi l \}, \\ \bar{\varphi}_3 &= (3 \bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_1) / 4, \quad \bar{\varphi}_4 = (3 \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1) / 2, \quad \bar{\varphi}_5 = \bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\varphi}_2, \quad \bar{\varphi}_6 = 4 \bar{\varphi}_5 - 3 \bar{\varphi}_2^2 / \bar{\varphi}_3, \quad \bar{\varphi}_7 = \bar{\varphi}_5 / \bar{\varphi}_3, \\ \pi &= \sqrt{12 N_{ij} / EI}, \quad \sin \alpha = (y_j - y_i) / l, \quad \cos \alpha = (x_j - x_i) / l, \quad \text{であり, 式-(1)~} \end{aligned}$$

(3) において, φ は $N > 0$ の場合, $\bar{\varphi}$ は $N < 0$ の場合に対してそれぞれ使い分けるものとする。

なお, 変位の影響を考慮に入れて解析する場合には上記において, $\sin \alpha = \{(y_j - y_i) + (v_j - v_i)\} / l$
 $\cos \alpha = \{(x_j - x_i) + (u_j - u_i)\} / l$, $l = \sqrt{\{(x_j - x_i) + (u_j - u_i)\}^2 + \{(y_j - y_i) + (v_j - v_i)\}^2}$ と
して繰返し計算を行なえばよい。また上記の π の値は, $N_{ij} = P x_{ij} \cdot \cos \alpha + P y_{ij} \cdot \sin \alpha$ によって計
算される N_{ij} から決定されるから, 変位の影響を考慮しない場合でも解式が非線形となり繰返し計算
が必要である。上記の諸式中, 記号の説明を省略したものについては, 文献(1)を参照されたい。

b) 節点における力の釣合条件式。 構造物中の任意の節点 i に作用する外力の x, y 方向の成分を
それぞれ, $\bar{P}_{xi}$, $\bar{P}_{yi}$, 外力のモーメントを $\bar{M}_i$ であらわし, 節点 i に集まる部材中, i の両端剛
節部材の数を n 本, i の両端滑節部材の数を m 本, i 端滑節 j 端剛節部材の数を m 本, および, i 端
剛節 j 端滑節部材の数を n 本として, 節点 i における力の釣合条件式を書けば, 式-(5)となる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_{xi} &= \left(\sum_j^{n \times 2} a_{ij} + \sum_j^{m \times n} a_{ij} \right) u_i - \sum_j^{n \times 2} (a_{ij} \cdot u_j) - \sum_j^{m \times n} (a_{ij} \cdot u_j) + \left(\sum_j^{n \times 2} b_{ij} + \sum_j^{m \times n} b_{ij} \right) v_i \\ &\quad - \sum_j^{n \times 2} (b_{ij} \cdot v_j) - \sum_j^{m \times n} (b_{ij} \cdot v_j) - \left(\sum_j^{n \times 2} c_{ij} + \sum_j^{m \times n} c_{ij} \right) \theta_i - \sum_j^{n \times 2} (c_{ij} \cdot \theta_j) - \sum_j^{m \times n} (c_{ij} \cdot \theta_j), \\ \bar{P}_{yi} &= \left(\sum_j^{n \times 2} b_{ij} + \sum_j^{m \times n} b_{ij} \right) u_i - \sum_j^{n \times 2} (b_{ij} \cdot u_j) - \sum_j^{m \times n} (b_{ij} \cdot u_j) + \left(\sum_j^{n \times 2} \bar{a}_{ij} + \sum_j^{m \times n} \bar{a}_{ij} \right) v_i \\ &\quad - \sum_j^{n \times 2} (\bar{a}_{ij} \cdot v_j) - \sum_j^{m \times n} (\bar{a}_{ij} \cdot v_j) + \left(\sum_j^{n \times 2} \bar{c}_{ij} + \sum_j^{m \times n} \bar{c}_{ij} \right) \theta_i + \sum_j^{n \times 2} (\bar{c}_{ij} \cdot \theta_j) + \sum_j^{m \times n} (\bar{c}_{ij} \cdot \theta_j), \\ \bar{M}_i &= - \left(\sum_j^{n \times 2} c_{ij} + \sum_j^{m \times n} c_{ij} \right) u_i + \sum_j^{n \times 2} (c_{ij} \cdot u_j) + \sum_j^{m \times n} (c_{ij} \cdot u_j) + \left(\sum_j^{n \times 2} \bar{c}_{ij} + \sum_j^{m \times n} \bar{c}_{ij} \right) v_i \\ &\quad - \sum_j^{n \times 2} (\bar{c}_{ij} \cdot v_j) - \sum_j^{m \times n} (\bar{c}_{ij} \cdot v_j) + \left(\sum_j^{n \times 2} d_{ij} + \sum_j^{m \times n} d_{ij} \right) \theta_i + \sum_j^{n \times 2} (\bar{d}_{ij} \cdot \theta_j), \end{aligned} \right\} \quad \text{---(5)}$$

式-(5)において, 両端滑節部材は $EI=0$ を有する両端剛節部材として取り扱えばよい。式-(5)
を構造物の全節点について立てると, 節点の変形量を未知数とした連立一次方程式を得るが, これは
上述のような非線形要素を含んでいるから, 変形量は, 連立一次方程式をただ一度解くだけでは求め
られず, 繰返し計算によって求める必要があるが, これについては後述する。

c) 断面力。 変形量が求められたならば, これらの結果を枝端条件に応じて式-(1)~(3)に代入
すれば, $P x_{ij}$, $P y_{ij}$, および, M_{ij} を求めることができる。いま, 枝端 i における軸方向力を N_i
, セン断力を Q_i , 曲げモーメントを M_i であらわし, それぞれ, 初等力学におけると同様な符号の
規約をするものとするれば, これらの断面力は上記の枝端力から, 式-(6)によって計算される。

$$\begin{aligned} \text{式-(6) において (I1) とあるのは,} \quad \begin{bmatrix} N_i \\ Q_i \\ M_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & (\pm 1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P x_{ij} \\ P y_{ij} \\ M_{ij} \end{bmatrix} \quad \text{---(6)} \\ (x_j - x_i) &> 0, \text{ (または, } (y_j - y_i) > 0 \text{)} \\ \text{の場合には (+) を, } (x_j - x_i) &< 0, \end{aligned}$$

(または、 $(y_j - y_i) < 0$) の場合には(-)を用いることを意味している。

d) 与えられた荷重に対する解の求め方。式-(6)を構造物の全節点について立てて得られる連立一次方程式は、一般的に式-(7)のように表わされる。式-(7)にお

$$S = K \cdot \Delta \quad (7)$$

いて、 K はいわゆる *Stiffness matrix* であり、 S は各節点に作用す

る外力を表わす列ベクトル、 Δ は各節点の変形量を表わす列ベクトルである。式-(7)は前述のような非線形要素を含んでいるから、以下のような繰返し計算によって与えられた荷重 S に対する解 Δ を決定する。すなわち、まず最初に軸力の二次的な影響を考慮しない通常の変形法(式-(4)の各係数を、 $q_i = \bar{q}_i = 1$ として計算したもの)によって *Stiffness matrix* K_0 を作り、式-(7)に相当する方程式、 $S = K_0 \cdot \Delta$ を解き、各部材について N_{ij} の第1近似値を求める。つぎに、いま求めた N_{ij} を用いて q_i , $\bar{q}_i$ を計算し、新たな *Stiffness matrix* K_1 を作って、さきと同様に $S = K_1 \cdot \Delta$ を解いて N_{ij} の第2近似値を求める。このような操作を繰返すことによって変形量や断面力は一定値に収斂するから、適当な精度に達したとき計算を打切る。変位の影響を考慮する場合には各段階で近似値が求めた時点において、a) に示した式を用いて変形による位置関係のずれを修正する。

e) 座屈荷重の決定。任意定数を k として、d) で述べた方法によって、 kS なる荷重系が作用した場合の変形量を求める。この k の種々な値に対応する代表的な変形量 S の逆数 $1/S$ を求め、縦軸に k を、横軸に $1/S$ をとって $k-1/S$ 曲線を描き、この曲線が縦軸を切るとき k を求めれば、 kS が求める座屈荷重を与える。これを換言すれば、座屈荷重 kS を与える k の値は、変形量が無限大となる k の最小値であるから、 $K(k) = 0$ の根の最小値としても求められる。ここで、 $K(k)$ は荷重系 kS が作用した場合の式-(7)の K に相当する *Stiffness matrix* である。

3 塑性解析における崩壊荷重の計算法。

a) 内力追跡法。ある外荷重と弾性的に平衡状態にある構造物において、その荷重強度を漸次増大してゆくと、通常、その構造物は、すべての点で弾性域内にある時点から、弾性域内にある部分と塑性域内に入った部分とが混在する段階を経て、最終的に機構を形成して崩壊する。この崩壊過程のすべてを順次追跡して、崩壊荷重を定める塑性解析法を、倉西博士は“内力追跡法”と名付け、簡単な構造物に対する解析法を、数種類の例題について具体的に示されている。²⁾ したがって、ここではその詳細は省略するが、ただ、本研究で対象とした構造物は、曲げ材と同時に軸力材を有するから、その解析法は文献 2) における 3・1 と 3・2 の例題における検討を併用して行なう必要があることを付記しておく。

b) 弾性計算法。内力追跡法によって構造物の塑性解析を行なう場合、一つの塑性関節もしくは全塑性軸力材が発生してから次のそれらが発生するまでの荷重増加に対しては、弾性計算が成立する。この弾性計算は、塑性部材が発生することによって構造形式を変化してゆくいわゆる *Veränderliches System* に対する計算が必要であるため、これに適した変形法によって行なう。弾性計算法は、塑性解析的検討と同時に安定解析的検討を行なって極限荷重を決定するためには、上述の 2. における諸式を用いるべきであるが、計算機の容量の制限から極限荷重に関しては後述のような決定法を用いることとし、ここでは、塑性解析を別個に行なうこととし、式-(4)において $q_i = \bar{q}_i = 1$ と置いた通常の変形法の式を用いて行なう。

4 極限荷重の決定法。

上述のように、安定解析と塑性解析とを全く同時に行なって極限荷重を決定することは、大型容量の電子計算機を必要とするため、本研究においては以下のような方法によって極限荷重を決定する。

すなわち、まず、与えられた構造物に対してそれが崩壊に到るまでの全過程を塑性解析的見地から追跡し、塑性関節や全塑性軸力枝の発生する位置、順序、および、その都度の荷重強度を知る。ついで、崩壊の途中の各段階における構造形式について安定解析を行なって各構造形式に対する座屈荷重を求めて、さきの塑性解析によって得られた各段階の荷重強度と比較して極限荷重を決定するのである。図-1を例にとれば、崩壊が図の(a)→(b)→(c)の順に進行すると考えた場合、(a)、(b)、(c)の各形式について安定解析を行なって、各形式に対する座屈荷重 P_0 を計算し、たとえば $P_0 > P_1$ 、 $P_2 > P_1 > P_1$ となった場合、 P_1 を極限荷重と考えるわけである。

図-1

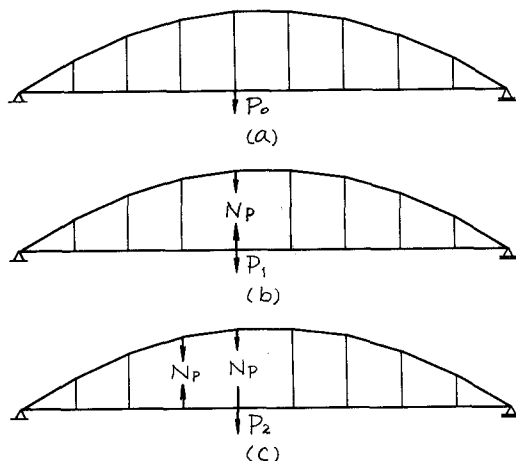
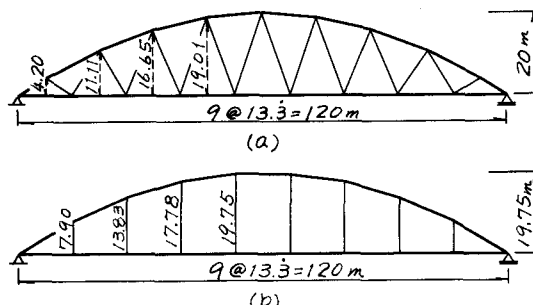


図-2 計算例骨組図



5 計算例。
上弦格梁が拋物線上にある図-2に示ような骨組をもつ斜腹材系と鉛直吊材系とについて、荷重状態を種々変化させた場合について極限荷重を求め、比較検討する。各部材の諸性質は比較を容易にするため、表-1に示すようなものとした。計算結果は紙面の都合上割愛し、講演会当日プリント類を配布する予定である。

6 むすび。

剛滑節構造物について、安定解析と塑性解析の両面から検討して極限荷重を決定することを試み、斜腹材をもつアーチ系構造物に耐荷能力の面から検討を加えてみた。電子計算機に対するプログラミングについては省略したが、これについては文献(3)、(4)を参照されたい。

表-1 部材の諸性質

部材	型式	斜腹材系			鉛直吊材系		
		ローゼ桁	タイダー	ランガ桁	ローゼ桁	タイダー	ランガ桁
上弦材	I (cm ⁴)	10 ⁶	10 ⁶	10 ⁶	10 ⁶	10 ⁶	10 ⁶
	F (cm ²)	500	500	500	500	500	500
	Mp (tm)	583	583	—	583	583	—
	Np (t)	1400	1400	1400	1400	1400	1400
下弦材	I (cm ⁴)	10 ⁶	—	10 ⁶	10 ⁶	—	10 ⁶
	F (cm ²)	500	500	500	500	500	500
	Mp (tm)	583	—	583	583	—	583
	Np (t)	1400	1400	1400	1400	1400	1400
腹材	F (cm ²)	50	50	50	100	100	100
	Np (t)	140	140	140	280	280	280

参考文献

- 1) 成岡・児嶋・竹内、道路、通巻259号(S.39.7), pp. 757~765.
- 2) 倉西正嗣、極限設計法、オーム社、pp. 23~39.
- 3) 児嶋・平尾、第19回土木学会中国四国支部講演概要、pp. 74~76.
- 4) 児嶋・平尾、第20回土木学会中国四国支部講演概要、pp. 56~58.