

東京大学工学部 正員 奥村 敏恵
名古屋工業大学 正員 ○松浦 聖

まえがき 支承構造は固定の、いわゆるバスケット・ハンドル形式のアーチに、単一集中荷重が、そのスパン中央に鉛直に加えられるとき、かかるアーチの崩壊荷重を、とくにテーパーの角度 γ の変化による影響に着目して、解析的に求めた。解析の便宜から、その主構は円弧アーチで、また完全塑性体から構成され、その断面も一様の長方形断面と考えている。崩壊荷重の算定には、降伏関節を想定して、いわゆる仮想仕事の原理を用いて、その上界を求めた。またとくに断面力として、軸力、ねじりモーメント、面内曲げモーメントおよび面外曲げモーメントの4つを考え、したがって4次元降伏多面体なる概念を考慮して算定している。

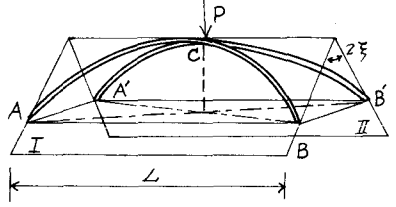


図-1 アーチ見取図

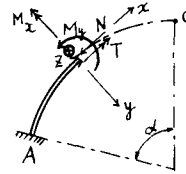


図-2 断面力(面I)

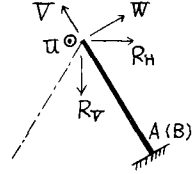


図-3 頂点Cの変位

1 崩壊杆構および幾何学的変形条件式

(1) 断面力変位の記号および符号 図-2に解析に考慮

する断面力と示し、崩壊杆構における各関節での、それら断面力に対応する変位は、つぎのように考える。面内曲げモーメントおよびそれに対応する迴転角は M_x, θ 、面外曲げモーメントおよび迴転角は M_z, ϕ 、軸力および軸軸方向変位は N, Δ 、さらにねじりモーメントおよびねじれ角は T, ψ とする。つぎに崩壊杆構における頂点Cの変位として、図-3のように U, V, W, R_H および R_V を考える。

(2) 崩壊杆構 構造物が対稱で、さらに負載される荷重も対稱だから、図-4に示すような、支点・頂点およびその中間点に塑性ヒンジが発生して対稱形に塑性崩壊する杆構が考えられよう。

(3) アーチの幾何学的変形条件 かく塑性ヒンジにおいて許される部分の微小な運動によって、ヒンジ3に生ずる変形は、幾何学的に決定される。

$$U = \rho Q_1(1 - \cos \alpha) + \rho Q_2(1 - \cos \beta) + \Delta_1 \cos \alpha + \Delta_2 \cos \beta + \Delta_3/2$$

$$V = \rho(Q_1 \sin \alpha + Q_2 \sin \beta) - \Delta_1 \sin \alpha - \Delta_2 \sin \beta, \quad W = -\rho\{\psi_1(1 - \cos \alpha) + \psi_2(1 - \cos \beta) + \phi_1 \sin \alpha + \phi_2 \sin \beta\}$$

さらに頂点の変位 R_H, R_V は、式(1)に対して、つぎのような関係がある。

$$R_H = W \cos \gamma - V \sin \gamma, \quad R_V = -W \sin \gamma - V \cos \gamma \quad \dots (2)$$

ここで、崩壊変形の対称性と連続性を考慮すると、変形量の満足すべき適合条件式(3)が考えられる。

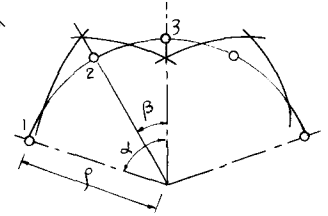


図-4 アーチ崩壊杆構

(降伏関節の位置)

$$U = 0, \quad R_H = 0, \quad Q_1 + Q_2 + Q_3/2 = 0, \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3/2 = 0, \quad \omega'_1 + \omega'_2 - \omega'_3 = 0 \quad \dots (3)$$

ここで、 ω_i はアーチ面内で考えた水平軸まわりの迴転角、 ω'_i はアーチ面内で考えた鉛直軸まわりの迴転角。

2 崩壊荷重の算定

アーチの崩壊荷重は、仮想仕事の原理を用いて、その(2)の場合図-5-aに示す長方形断面)上界が算定できる。さてここで式(4)に示す一般化された応力

$$m_x \equiv M_x/M_{0x}, \quad t \equiv T/T_0 \quad \dots (4)$$

を考え、それら n, m_x, t に対応するつぎの式(5)に示すヒズミ λ, ϕ および ψ を導入して計算を進めることとする。 $(M_0, T_0$ および N_0 は、かく降伏モーメントおよび降伏力)

$$\lambda_i = \frac{N_0}{M_{0y}} \Delta_i, \quad \Delta_i = \frac{M_{0y}}{N_0} \lambda_i = 2Lh \lambda_i; \quad \phi_i = \frac{M_{0x}}{M_{0y}} \phi_i, \quad \phi_i = \frac{M_{0x}}{M_{0y}} \phi_i = \kappa \phi_i; \quad \psi_i = \frac{T_0}{M_{0y}} \psi_i, \quad \psi_i = \frac{M_{0y}}{T_0} \psi_i = q \psi_i \quad \dots (5)$$

$$\text{ここに、} h = H/4L, \quad \kappa = H/B = H/L \cdot L/B, \quad q = \frac{3\kappa^2}{3\kappa - 1} \quad \dots (6)$$

さて内部仕事 W_i は(7)で、

$W_i = M_{0y} [4(m_{y1}Q_1 + m_{x1}P_1 + n_1\lambda_1 + t_1\gamma_1) + 4(m_{y2}Q_2 + m_{x2}P_2 + n_2\lambda_2 + t_2\gamma_2) + 2(m_{y3}Q_3 + m_{x3}P_3 + n_3\lambda_3 + t_3\gamma_3)] \dots (7)$
 一方また負載される荷重を P とすると、外部仕事 W_e はつぎの式(8)で算定される。

$W_e = P \cdot R_T = -P \{ P_1 \{ (Q_1 \sin \alpha + Q_2 \sin \beta) - 2n_1 \lambda_1 \sin \alpha - 2n_2 \lambda_2 \sin \beta \} \cos \beta + P_2 \{ -8\gamma_1(1 - \cos \alpha) - 8\gamma_2(1 - \cos \beta) - K\varphi_1 \sin \alpha - K\varphi_2 \sin \beta \} \sin \beta \} \dots (8)$
 したがって、仮想仕事の原理により、式(7)と(8)から崩壊荷重 P は算定されることとなる。

さて P の算定式に含まれている Q_i, P_i, λ_i および γ_i の間には降伏条件を満足し、さらに塑性の応力ひずみ法則にしたがって塑性流動の法則式(9)を考慮する必要がある。

$$Q_i = \mu_i \frac{\partial \Phi}{\partial m_{y_i}}, \quad P_i = \mu_i \frac{\partial \Phi}{\partial m_{x_i}}, \quad \lambda_i = \mu_i \frac{\partial \Phi}{\partial n_i}, \quad \gamma_i = \mu_i \frac{\partial \Phi}{\partial t_i} \dots (9)$$

ここに、 Φ は降伏関数、 μ_i は正のスカラ一量である。結局崩壊荷重は式(3)と式(9)の関係を考慮して計算すればよい。

3 降伏条件、降伏関数

m_x, m_y, n および t の断面力4つを考慮するとき、降伏条件は図-5に対して、つぎの式(10)のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} 5-a, \quad m_y \sqrt{1-t^2} + \frac{3}{4} m_x^2 + n^2 + t^2 &= 1; \quad 5-b, \quad \frac{3}{4} m_y^2 + m_x \sqrt{1-t^2} + n^2 + t^2 = 1 \\ 5-c, \quad -m_y \sqrt{1-t^2} + \frac{3}{4} m_x^2 + n^2 + t^2 &= 1; \quad 5-d, \quad \frac{3}{4} m_y^2 - m_x \sqrt{1-t^2} + n^2 + t^2 = 1 \end{aligned} \right\} (10)$$

4 4次元降伏多面体

(1) 降伏条件の多面体近似 問題を解くのに降伏条件式(10)を折平面近似で置き換えると便利である。さて2次元の降伏曲線は円に、3次元の降伏曲面は球に近いことより、4次元の降伏曲面は $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ を満足する、いわゆる4次元の球に近いと類推できよう。そこで、さらにその球に内接する近似多面体を近似降伏多面体であると、まず考えることとする。いまオ1象限に例をとり、3次元で云えば図-6のように真中のA点と各軸の頂点とをそれぞれ結んでできる平面(1象限に3平面)からなる四面体を、4次元では、このA点に対応してA'点($x=y=z=w$ の点)、(0.5, 0.5, 0.5, 0.5)の点と4つの各軸の頂点とを結んでできる、いわゆる超平面よりなる四面体(1象限に4平面で16象限)を考慮することとする。

多面体の方程式の1例(オ1象限)を表-1に列挙する。

(2) 近似降伏多面体の方程式

(1) では4次元の球に内接する多面体について考察したが、いま論じている問題の近似降伏多面体の方程式は、実は球に内接するのではなく、球に近いと考えるべきだから、A'点として式(10)より降伏曲面上の点を求めて補正をすれば、つぎのような

降伏曲面に対する近似降伏多面体の64個の超平面の方程式が得られる。

オ1象限の場合のみ列挙すれば表-2のようである。

オ1象限の場合のみ列挙すれば表-2のようである。

5 数値計算

数値計算をする場合、塑性ヒンジが降伏多面体上のどこにあるか、さらにヒンジ2の位置(β は未定)はどこかを定め、最も上界として通した近似崩壊荷重は、電子計算機を使って、数多くの試算により決定した。無次元化した崩壊荷重を $F \equiv P \cdot L / M_{0y}$ とすると、この F に影響を与える独立変数は $t/L, H/L$ 、この3つで、 B/L は関係しない。(Bは M_{0y} に関連はある) 計算の結果からは、テーパの角度 α が増大すれば、 α が10°程度までは、その影響もわずかであるが崩壊荷重は減小傾向にある。

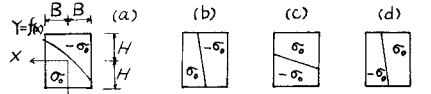


図-5

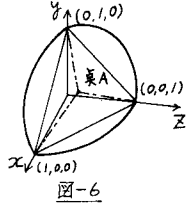


図-6

表-1	1	$x+y+z+w=1; (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (0.5,0.5,0.5,0.5)$
	2	$-x+y+z+w=1; (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (0.5,0.5,0.5,0.5)$
	3	$x-y+z+w=1; (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,0,0,0), (0.5,0.5,0.5,0.5)$
	4	$x+y-z+w=1; (0,0,0,1), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0.5,0.5,0.5,0.5)$

表-2	1	$m_y + m_x - 0.840t = 1; (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0.463, 0.463, 0.463, 0.463)$
	2	$-0.840m_y + m_x + t = 1; (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (0.463, 0.463, 0.463, 0.463)$
	3	$m_y - 0.840m_x + n + t = 1; (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,0,0,0), (0.463, 0.463, 0.463, 0.463)$
	4	$m_y + m_x - 0.840n + t = 1; (0,0,0,1), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0.463, 0.463, 0.463, 0.463)$

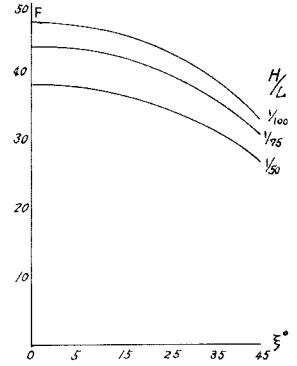


図-7 崩壊荷重 $F (t/L = 1/8)$