

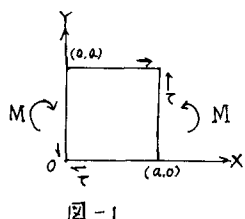
京都大学工学部 正員 白石 威人

川内製鉄(K.K) " 渋谷 敬之介

1. まえがき

プレートガーダーの腹板の設計は、高張力材の進歩や後座屈域における耐荷力の実験的ならびに理論的研究によってより合理的に設計されようとする気運にある。このような中であって著者らはプレートガーダーの腹板を矩形板としてとりだし周りに単純な境界条件をあたえることによって後座屈域における挙動を解析しようとする方法^{(1),(2),(3)}を外力としての条件とせん断力のみが作用する場合⁽⁴⁾、曲げモーメントのみが作用する場合⁽⁵⁾、せん断力と曲げが連成して作用する場合⁽⁶⁾の三つのケースについておこなったが、ここではこれらの結果を整理して少数ではあるが実験値との比較をおこなったものである。

2. 基本方程式の誘導および解析



初期たわみのないフラットな正方形板(板厚 h)に図-1に示すように曲げモーメント M とせん断力 q が作用した場合をKármánの方程式によって解析する。

$$\nabla^4 F = E \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right\} \quad \text{----- (1)}$$

$$\nabla^4 W = (h/b) \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial x \partial y} \right\} \quad \text{----- (2)}$$

ここで、 W : 変曲方向のたわみ F : Airy の力関数 E : ヤング率、

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

境界条件としては周辺単純支持を仮定する

$$W = 0 \quad (\text{全周辺に沿って})$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (x=0, x=a \text{ に沿って})$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (y=0, y=a \text{ に沿って})$$

$$\left. \begin{array}{l} W = 0 \\ M_x = 0 \\ M_y = 0 \end{array} \right\} \quad \text{----- (3)}$$

周辺における外力の条件として

$$M = -h \int_0^a \sigma_x \cdot y \, dy \quad (x=0, x=a \text{ に沿って})$$

$$\int_0^a \sigma_y \cdot dx = 0 \quad (y=0, y=a \text{ に沿って})$$

$$\tau_{xy} = \tau \quad (\text{全周辺に沿って})$$

$$\left. \begin{array}{l} M = -h \int_0^a \sigma_x \cdot y \, dy \\ \int_0^a \sigma_y \cdot dx = 0 \\ \tau_{xy} = \tau \end{array} \right\} \quad \text{----- (4)}$$

ここで式(3)を満足するようなたわみ W として次の2重フーリエ級数がある。

$$W = h \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} \quad \text{----- (5)}$$

式(5)を式(1)に代入すると式(1)は線型の方程式になる。従って式(4)を満足する F の決定は重ね合わせが可能になって容易に求まる。式(3),(4)を満足するようなたわみ W の項数のとり方は次のように考えた。

$\tau \rightarrow 0$ のときたわみは曲げのみのたわみ型に近づくべきであり、逆に $M \rightarrow 0$ の時はせん断力のみを受けたたわみ型に近づくべきである。このようなたわみ W として次式を仮定して7項を考えた。⁽⁷⁾

$$W = h \left(a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{a} + a_{21} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + a_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{a} + a_{23} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + a_{31} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \right. \\ \left. + a_{33} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \right) \text{----- (6)}$$

式(6)を式(4)に代入して式(4)を満足するようにFを決定すると

$$F = -\frac{2H}{\pi h} \left(y - \frac{a}{2} \right)^3 - \tau x y + E h^2 \sum_{p=1,3,5} \sum_{q=1,3,5} \bar{c}_{pq} \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{a} \text{----- (7)}$$

式(7)を式(2)に代入して Galerkinの方法によって \$a_{mn}\$ に関する代数方程式がえられる。

$$\int_0^a \int_0^a \left\{ \nabla^4 W - (16) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial W}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial W}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) \right\} \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{a} dx dy = 0 \text{----- (8)}$$

(r=1,2,3 s=1,2,3)

式(8)を \$(r,s)=(1,1), (1,3), (3,1), (1,5), (3,2), (5,2), (2,3), (3,3), (5,3)\$ とおいて計算することによって次の7元3次の連立方程式がえられる。ここで計算の便上、外力の項M, \$\tau\$ はそれぞれ無次元化して \$\lambda_M = M/D\$, \$\lambda_\tau = \tau h^3/6\$ とおいた。またポアソン比は \$V=0.3\$ とし, \$X=a_{11}\$, \$Y=a_{22}\$, \$U=a_{13}\$,

\$Z=a_{21}\$, \$W=a_{23}\$, \$V=a_{31}\$ \$T=a_{33}\$ とおいた。

$$-0.5X^3 + 0.75X^2U + 0.75X^2V - 1.62T^2X - 4.26U^2X + 6.5U^2V - 4.26V^2X + 6.5V^2U - 1.28Y^2X \\ - 3.56Y^2V - 2.8115Z^2X - 3.56Y^2U + 3.3225Z^2U - 3.004Z^2V - 1.4751W^2X - 5.368W^2V + 4.68XTU \\ + 4.68XTV - 2XU^2V + 2.259XZW - 2.25TU^2V - 7.7817TZW - 16.1318UZW + 4.82VWZ + 98.1ZT \\ = 1.465X - 0.0535\lambda_\tau T$$

$$-1.28X^2Y - 27.8101U^2Y - 15.3372T^2Y - 27.8101V^2Y - 18.1275Z^2Y - 33.6505W^2Y - 7.12XUY - 7.12XVY \\ - 24.8166TU^2Y - 24.8166TV^2Y - 32.25UVY - 30.2284YZW - 8Y^3 = 23.44Y + 0.3208\lambda_M Z + \\ 0.3465\lambda_M W - 0.0535\lambda_\tau X - 0.1733\lambda_\tau T + 0.0962\lambda_\tau U + 0.0962\lambda_\tau V$$

$$-2.8115X^2Z + 1.127X^2W - 8.448T^2Z + 6.2503V^2Z + 21.2860V^2W - 18.1275Y^2Z - 15.1142Y^2W + 12Z^2W \\ - 20.8725W^2Z - 6.25Z^3 + 1.62XTZ - 7.7817XTW + 6.645XUZ - 16.1318XUW - 6XVZ + 4.82XTW \\ - 15.8668TUZ + 22.5482TVZ - 60.8674TVW + 12.5UVZ - 26.1289UVW - 12.1288U^2Z \\ = 9.1563Z + 0.3208\lambda_M Y$$

$$2.134X^2T - XU^2 - 4.26X^2V - 86.6098T^2V + 6.5U^2X - 29.5U^2V + 60.75V^2T - 3.56Y^2X - 12.4083Y^2T \\ - 16Y^2U - 27.8102Y^2V - 3XZ^2 + 11.2741Z^2T - 16.2503Z^2V - 5.3568W^2X - 41.3845W^2V + 0.25X^3 \\ - 20.5V^3 - 22.5XTU + 13XUV + 4.82XZW - 60.8675TZW - 26.1289UZW + 9.25VZW \\ + 6.25Z^2U = 36.625V + 0.0962\lambda_\tau Y$$

$$-1.62X^2T + 2.34X^2U + 2.34X^2V - 86.6098U^2T - 86.6098V^2T - 15.3372Y^2T - 12.4082Y^2U - 12.4082Y^2V \\ + 0.81Z^2X - 8.448Z^2T - 7.9339Z^2U + 11.2741Z^2V - 99.2503W^2T - 22.5XUV - 7.7007XZW - 5.88675VZW \\ - 40.5T^3 + 20.25U^3 + 20.25V^3 - 64.078W^2U = 118.665T - 0.1733\lambda_\tau Y$$

$$2.34X^2T - X^2U - 4.26X^2U - 86.6098T^2U + 6.5V^2X - 29.5V^2U - 3.56Y^2X - 12.4082Y^2T - 27.8102Y^2U \\ - 16Y^2V + 3.3225Z^2X - 7.9334Z^2T + 6.25Z^2V + 64.0781W^2T - 83.2081W^2U + 0.25X^3 - 20.5U^3 - 22.5XTV \\ + 13XUV + 16.1218XZW - 26.1289VZW + 60.75TU^2 - 11.8798Z^2U = 36.625U + 0.0962\lambda_\tau Y$$

$$1.127X^2Z - 1.4755X^2W - 15.1142Y^2Z - 33.6529Y^2W - 9.2503T^2W - 62.9681U^2W - 20.8724Z^2W \\ + 21.286V^2Z + 4Z^3 - 24.25W^3 - 41.3845V^2W - 13.8818XUZ - 7.7007XTZ - 10.9136XVW \\ + 4.82XVZ - 60.8675TVZ - 102.9064TUW - 23.8789UVZ = 61.8963W + 0.3465\lambda_M Y$$

式(9)は係数に関する1次と3次より特殊な連立方程式である。いま係数の比がわかっているとする
と次のような簡単な型の方程式になる。 $\frac{X}{Y}=A_1, \frac{Z}{Y}=A_2, \frac{U}{Y}=A_3, \frac{V}{Y}=A_4, \frac{W}{Y}=A_5, \frac{T}{Y}=A_6$ とすると式(9)は

$$U_\ell(A_1, A_2, A_3, A_5, A_6) \cdot Y^3 = T_\ell(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, \lambda_M, \lambda_T) Y \quad \text{----- (10)}$$

$$\ell = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$$

となりYについて容易に解けて

$$Y = 0, \quad Y = \pm \sqrt{T_\ell / U_\ell}$$

となるこの3根の物理的な意味は、座屈点($T_\ell = 0$)を分岐点として全く面外への変形をしない($Y = 0$)とフラットな板に対称な面外への変形が二つあることを表わしている。 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ の決め方については座屈点の近傍では $Y \neq 0$ とし、 $T_\ell(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, \lambda_M, \lambda_T) = 0$ より $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ が決まるのでここを出发点として λ_M, λ_T を徐々に変化させてトライアルな方法を求めていった。これらの計算は京都大学電子計算機KD-C-IIによっておこなわれた。式(9)は荷重項を2つ含んでいるのでこれと次の三つの場合

(A), (B), (C)にわけて一元化した。せん断力の影響が卓越している場合として

(A) $\lambda_T = 6\lambda_M$ 、ここでは曲げモーメント項の影響は小さいとして $W = 0$ として6元3次の連立方程式を解いた。次に曲げモーメントとせん断力が伯仲して作用していると考えられる場合として(B) $\lambda_T = 2.4\lambda_M$ は式(9)を解いた。最後は曲げモーメントの影響が卓越している場合として(C) $\lambda_T = \lambda_M$ とせん断力の影響は小さいとして式(9)において $U = V = 0$ とした5元3次の連立方程式を解いた。

かようにして(A), (B), (C)の三つの場合についてえられた根によって、正方形板の各辺を10等分した100点についてたわみ、膜応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 、降伏条件

としてHuber-von Mises-Henckyの比較応力度 $\sigma_H = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$ が求められた。

最大たわみと荷重(λ_M / λ_{Mr})の関係は図-3に示すようになった。座屈点を境としてかなり急激なたわみが生じている。実際には初期たわみのためこの曲線は更にゆるやかに変形するであろう。 W_{max} の点とは(A), (B), (C)いずれの場合も対角線上に生じており、曲げモーメント影響が強くなるに従って、周辺 $Y = a$ に近づいている。

膜応力の分布状態を図-4に示す。これは $\lambda_T = 6\lambda_M$ の場合であって、外力 λ_M による作用が σ_x としてそのまま伝わっていないことがわかる。この傾向はここでは省略したが(B), (C)の順にうすれていって外力 λ_M による応力は σ_x としてそのまま伝わっている。また、 σ_x のみたれば λ_M が λ_{Mr} に近づくにつれて少なくなっているようである。膜応力 σ_y の発生もかなり顕著である。これはたわみの大きさに応じて生じているようである。

次に最大比較応力度 σ_{Hmax} と(λ_M / λ_{Mr})の関係を図-5に示した。

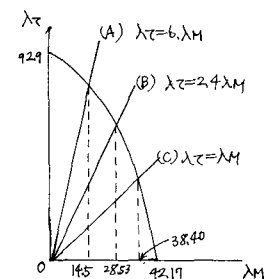


図-2

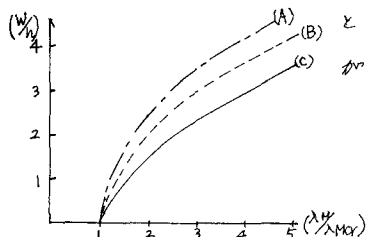


図-3

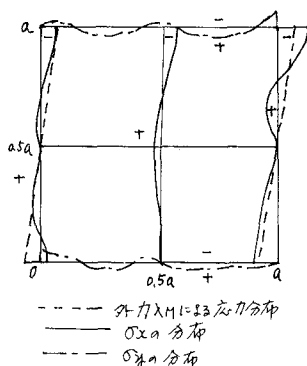


図-4. (λ_M / λ_{Mr}) = 3.47

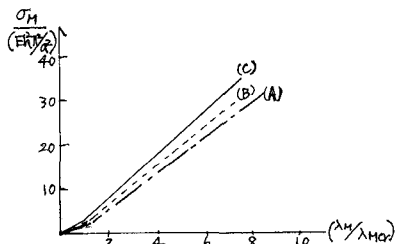


図-5

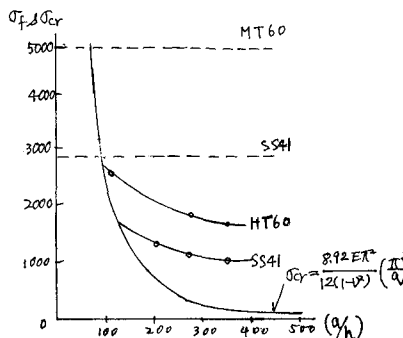


図-6

		曲げ耐荷力(単位: kg/cm²)					
曲げパネル (パネル比 1)	材質	降伏点 (kg/cm²)	細長比 (%)	実験値	Beer 理論値	計算値 $\lambda r=0$	計算値 $\lambda r=24$
	A 材 SS41	2800	1200/4.5	2522	2699	2720	2415
	B 材 HT60	5000	1200/4.5	4120	4750	4810	4236
	C 材 HT60	5000	1200/8	4828	4750	4860	4314

		せん断耐荷力(単位: kg/cm²)					
せん断 パネル (パネル比 1)	材質	降伏点 (kg/cm²)	細長比 (%)	実験値	Beer 理論値	計算値 $\lambda r=6.4$	計算値 $\lambda r=24$
	A 材 SS41	1617	1200/4.5	* 369	1470	778	555
	B 材 HT60	2887	1200/4.5	1404	1690	1381	895
	C 材 HT60	2887	1200/6	* 626	2330	1390	992

表-1

(A),(B),(C)のいずれの場合も座屈点を越えたと腹板力の発生で σ_M の増大する割合が小さくなっている。 σ_{Mmax} の生じる点は(A),(B),(C)のいずれの場合も、 $Y=a$ なる周辺上である。プレートカーダの破壊がフランジ上に生じることも考えると、このような板の解析によってかなり実情に近い応力状態になっているように思われる。図-5の関係を利用して、 σ_{Mmax} になった時点で降伏がおこるとしてそのときの外力 λM 、最大たわみ細長比 (λ/λ_0) 、これらと線型の理論よりえられた座屈荷重の相互関係を図-6に示した。ここでは後座屈域における耐荷力において降伏点の差による関係を表わすため、SS41 $\sigma_Y=2800 \text{ kg/cm}^2$ 、HT60 $\sigma_Y=5000 \text{ kg/cm}^2$ について示した。図より明らかなことは後座屈域における耐荷力を考えれば、材料の引張強度の特性がいかに重要である。この図は(A) $\lambda r=6.4 M$ について示したが(B),(C)についても同じような傾向がある。 σ_F は外力 λM による最大応力である。

表-1の関西橋梁鉄骨溶接研究会⁸⁾昭和39年に行なった実験とこれまで行なった計算結果とを比較してみた。表中*はこの時点で他のパネルが破壊した値である。曲げおよびせん断パネルとそかなりいい一致がみられる。曲げパネルにおいて $\lambda r=0$ はせん断力が零の場合である。せん断パネルにおいては純せん断ではなく曲げモーメントの影響が少し加味された $\lambda r=6.4 M$ の場合に近いと考えられる。

3. おわりに

単純な境界条件のもとにおいて解析をおこなった結果より考えれば、細長比 200~400 以下は後座屈域を考慮することによって、充分経済的な設計が可能になる。

- 1) S. Levy "Bending of Rectangular Plates with Large Deflection" NACA report No. 737, 1942.
- 2) T. M. Coan "Large Deflection Theory for Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression."
- 3) N. YAMAKI "Post Buckling Behaviour of Rectangular Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression" Journal of Applied Mechanics, Vol. 18, 1951, Vol. 27, 1960.
- 4) 小西, 白石, 渡辺 "腹板の耐荷力に関する一考察" 土木学会論文集 136号 (昭和40年11月)
- 5) 小西, 白石, 浜田 "後座屈域における腹板の耐荷力に関する2,3の基礎的研究" 関西支部講演会 (昭和43.5月)
- 6) 小西, 白石, 浜田 "後座屈域における腹板の耐荷力について一考察" 年次学術講演会 (昭和43.10月)
- 7) S. P. Timoshenko, T. M. Gere "Theory of Elastic Stability" Mac. Graw-Hill (1937-389)
- 8) 関西橋梁鉄骨溶接研究会 "プレートカーダの耐荷力に関する理論と実験" 1965年7月